

А.Д.АМАНГЕЛЬДЫ, А.К.ЖУБАЕВ, А.Б.МУНАРБАЙ, К.К.МУХИТ
 АРУ им.К.Жубанова (Актобе, Казахстан)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЛИНЫ НИТИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА КОСВЕННЫМИ ИЗМЕРЕНИЯМИ

В результате проведения серии прямых независимых измерений физической величины x при одинаковых условиях получена выборка из n значений: x_1, x_2, \dots, x_n . В качестве оценки \hat{x} истинного значения измеряемой величины x принимается **выборочное среднее значение \bar{x}** (среднее арифметическое по данной выборке):

$$\hat{x} = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (1)$$

Случайная погрешность среднего значения \bar{x} оценивается по величине выборочного стандартного отклонения среднего арифметического (среднеквадратичной погрешности среднего арифметического):

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (2)$$

Далее вычисляется доверительный интервал $\Delta_{сл}$ для случайной погрешности среднего арифметического значения \bar{x} :

$$\Delta_{сл} = t_{\alpha, n-1} \cdot S_{\bar{x}}, \quad (3)$$

где $t_{\alpha, n-1}$ – коэффициент Стьюдента для выбранного значения вероятности α , обычно $\alpha \sim 0,9-0,95$.

Таблица 1. Значения коэффициента Стьюдента $t_{\alpha, n-1}$ при различных значениях объема выборки n и коэффициент доверия $\alpha=0,95$

$n-1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	120
$t_{\alpha, n-1}$	12,71	4,30	3,18	2,78	2,57	2,45	2,37	2,31	2,26	2,23	2,09	1,98

Систематические погрешности остаются постоянными или закономерно меняются при повторных измерениях. Основными являются погрешность прибора и погрешность округления.

Погрешность прибора характеризуется предельной (максимально допустимой для данного класса приборов) погрешностью $\Delta_{приб}$. Если значение $\Delta_{приб}$ известно, то значение стандартного отклонения $\sigma_{приб}$ для оценивания погрешности прибора равно:

$$\sigma_{приб} \approx \frac{\Delta_{пред}}{3} \quad (4)$$

Для электронных таймеров (измерителей временных интервалов) для расчета погрешности используется формула:

$$\Delta_{пред} = 0.0001 \cdot x + 1 \text{ мл.ед.}, \quad (5)$$

где 1 мл.ед. – значение младшего разряда таймера; x – результат измерения.

Погрешность округления. Погрешность стандартного отклонения для оценивания погрешности округления вычисляется по формуле:

$$\sigma_{\text{окр}} = \frac{\omega}{\sqrt{12}}, \quad (6)$$

где ω – цена деления прибора с учетом нониуса.

Суммарная систематическая погрешность $\sigma_{\text{сист}}$, в предположении о независимости возникновения ее составляющих, может быть найдена по формуле:

$$\sigma_{\text{сист}} = \sqrt{\sigma_{\text{приб}}^2 + \sigma_{\text{окр}}^2}, \quad (7)$$

Доверительный интервал для систематической погрешности равен:

$$\Delta_{\text{сист}} = \gamma_{\alpha} \cdot \sigma_{\text{сист}}, \quad (8)$$

где $\gamma_{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}$ – коэффициент Чебышева. Для $\alpha=0.95$ выбирается $\gamma=4.47$.

Для величины стандартного отклонения суммарной погрешности выборочного среднего значения \bar{x} используется следующая формула:

$$\sigma_{\text{сумм}} = \sqrt{S_{\bar{x}}^2 + \sigma_{\text{сист}}^2}, \quad (9)$$

где $S_{\bar{x}}$ – выборочное стандартное отклонение среднего арифметического (2), $\sigma_{\text{сист}}$ – оценка суммарной систематической погрешности (7).

Доверительный интервал для суммарной погрешности равен:

$$\Delta_{\text{сум}} = \gamma_{\alpha} \cdot \sigma_{\text{сумм}}, \quad (10)$$

Для уравнений косвенных измерений вида $u=f(x,y,\dots,z)$ в качестве оценки \hat{u} истинного значения физической величины принимают величину

$$\hat{u} = f(\hat{x}, \hat{y}, \dots, \hat{z}), \quad (11)$$

где $\hat{x}, \hat{y}, \dots, \hat{z}$ – оценки соответствующих прямо измеренных величин.

Если прямые измерения проводились в одинаковых условиях, то оценкой является среднее арифметическое, т.е. $\hat{x} = \bar{x}$ и т.д.

Погрешность оценки \hat{u} можно охарактеризовать с помощью выборочного стандартного отклонения S_u случайных и стандартного отклонения σ_u систематических ошибок, вычисляемых по формулам:

$$S_u = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\hat{x}, \hat{y}, \dots, \hat{z}}^2 \cdot S_{\hat{x}}^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{\hat{x}, \hat{y}, \dots, \hat{z}}^2 \cdot S_{\hat{z}}^2} \quad (12)$$

$$\sigma_u = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\hat{x}, \hat{y}, \dots, \hat{z}}^2 \cdot \sigma_{\hat{x}, \text{сист}}^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{\hat{x}, \hat{y}, \dots, \hat{z}}^2 \cdot \sigma_{\hat{z}, \text{сист}}^2} \quad (13)$$

где $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\hat{x}, \hat{y}, \dots, \hat{z}}$ – частная производная от функции $u=f(x,y,\dots,z)$, по переменной x , вычисленная при соответствующих оценках прямо измеряемых величин $\hat{x}, \hat{y}, \dots, \hat{z}$.

Для оценки относительной погрешности используется относительное стандартное отклонение $\delta u = \frac{S_u}{\hat{u}}$.

Доверительный интервал для случайных и систематических погрешностей может быть рассчитан в общем случае с использованием коэффициента Чебышева γ_{α} :

$$\Delta_{\text{сл}} = \gamma_{\alpha} \cdot S_u, \quad (14)$$

$$\Delta_{\text{сист}} = \gamma_{\alpha} \cdot \sigma_u, \quad (15)$$

Для оценки суммарной погрешности можно использовать формулу аналогичную как для прямых измерений:

$$\sigma_{\text{сум}} = \sqrt{S_u^2 + \sigma_u^2}, \quad (16)$$

Для оценки относительной погрешности используется относительное стандартное отклонение $\delta u = \frac{\sigma_{\text{сум}}}{\bar{u}}$.

Вычисление доверительного интервала для суммарной погрешности проводится с использованием коэффициента Чебышева:

$$\Delta_{\text{сум}} = \gamma_{\alpha} \cdot \sigma_{\text{сум}}, \quad (17)$$

Шарик на нити подвешивается за свободный конец нити крепится на неподвижной горизонтальной балке. Шарик в натянутом состоянии нити отводится на малый угол ($<10^\circ$) от вертикальной оси и отпускается с одновременным началом отчета времени. Шарик возвращается в начальную точку (точку ввода), совершив полный период колебания. Время t одного периода колебаний связана с длиной маятника соотношением:

$$t = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}},$$

откуда можно определить длину нити L :

$$L = \frac{gt^2}{4\pi^2}$$

С помощью таймера ($\omega=0.01$ (с)) проводятся n измерений из N периодов в каждом.

Получена серия измерений: $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$ (с).

Для оценки погрешности прямых измерений определяются среднее арифметическое значение (1) и стандартное отклонение среднего арифметического (2):

$$\bar{t} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i \text{ (с)}, \quad S_{\bar{t}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \cdot \sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2 \text{ (с)}}.$$

Далее по формуле косвенных измерений ($L = \frac{g \cdot t^2}{4\pi^2 N^2}$) вычисляется значение частной производной $\left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)_{\bar{t}} = \frac{g \cdot t}{2\pi^2 N^2}$ и по формулам (11) и (12) оцениваются длина нити и стандартное отклонение случайной погрешности

$$\bar{L} = \frac{g \cdot \bar{t}^2}{4\pi^2 N^2} \text{ (м)}, \quad S_{\bar{L}} = \sqrt{\left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)_{\bar{t}}^2 \cdot S_{\bar{t}}^2} = \frac{g \cdot \bar{t} \cdot S_{\bar{t}}}{2\pi^2 N^2} \text{ (м)}.$$

При оценке систематической погрешности для \bar{t} определяются:

– погрешность прибора (таймера) по формулам (5) и (4)

$$\Delta_{\text{пред}} = 0.0001 \cdot \bar{t} + 0,01 \text{ (с)} \quad \text{и} \quad \sigma_{\text{приб}} = \frac{\Delta_{\text{пред}}}{3} \text{ (с)};$$

– погрешность округления (6) $\sigma_{\text{окр}} = \frac{0,01}{\sqrt{12}} \text{ (с)}$

Суммарная систематическая погрешность (7) для \bar{t} равна

$$\sigma_{\text{сист}} = \sqrt{\sigma_{\text{пр}}^2 + \sigma_{\text{окр}}^2} \quad (\text{с})$$

соответственно, стандартное отклонение систематических ошибок для длины нити (13)

$$\sigma_{\bar{L}} = \frac{g \cdot \bar{t} \cdot \sigma_{\text{сист}}}{2\pi^2 N^2} \quad (\text{м}).$$

Суммарная (случайная и систематическая) погрешность (17) имеет вид:

$$\sigma_{L, \text{сум}} = \sqrt{S_L^2 + \sigma_{\bar{L}}^2} \quad (\text{м})$$

При $\alpha=0.95$, $\gamma_\alpha=4.47$ вычисляется доверительный интервал (17): $\Delta_{\text{сум}} = \gamma_\alpha \cdot \sigma_{L, \text{сум}}$ (м).

С учетом суммарной погрешности результат работы представляется в виде

$$L = \bar{L} \pm \Delta_{\text{сум}} \quad (\text{м}),$$

коэффициент доверия $\alpha=0.95$.

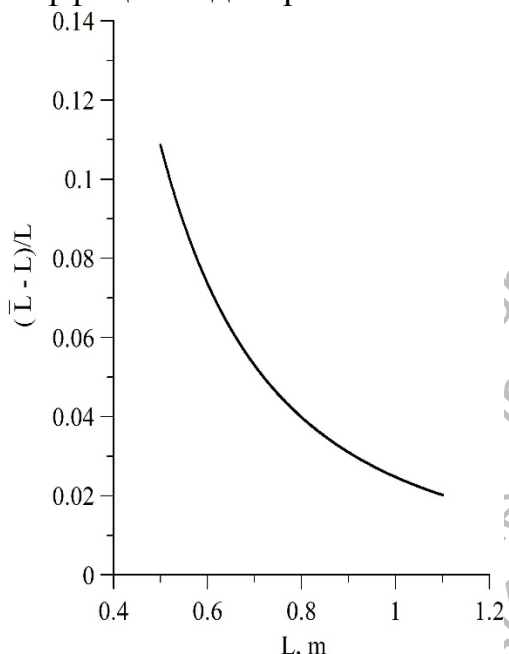


Рисунок 1. Зависимость относительной погрешности измерения длины маятника

Была проведена серия экспериментов (по 5 циклов в каждом) для маятника с длиной от 0,4 до 1,1 м. По вышеописанной методике было измерено время колебаний и вычислена длина маятника, исходя из эксперимента. Было выявлено (рис.1), что при небольших длинах нити данные косвенных измерений сильно разнятся с данными прямых измерений и с увеличением длины маятника наблюдается уменьшение этой разницы. Объяснением этому может служить тот факт, что при малых длинах маятника периоды колебаний малы и фиксация таких временных интервалов имеет большую погрешность. В дальнейших экспериментах с маятником следует выбирать длину не менее 1 м.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Тейлор Дж. Введение в теорию ошибок. Пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – 272 с.
2. Общий физический практикум. Механика. Под ред. А.Н.Матвеева, Д.Ф. Киселева. – М.: МГУ, 1991.
3. Деденко Л.Г., Керженцев В.В. Математическая обработка и оформление результатов эксперимента. – М.: МГУ, 1977. – 112 с.
4. Митин И.В., Русаков В.С. Анализ и обработка экспериментальных данных. М.: МГУ, 1997. – 48 с.