УДК **51(075.8)**
И.Н.Гуло, А.А.Черняк, Ж.А.Черняк
БГПУ, БГАС (Минск, Беларусь)

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ В ТЕСТАХ

В последнее время каждая кафедра, курирующая математические дисциплины (и не только) считает делом чести иметь наборы тестовых заданий по основным дисциплинам. Многие университеты выкладывают эти задания в открытом доступе в интернете, что приводит к массовому появлению клонов и однотипных заданий, не особо отличающихся друг от друга. И даже если бы эти тесты держались в особом секрете, трудно предположить, чтобы они отличались оригинальностью, поскольку, так или иначе, их содержание ограничивается традиционными задачами для ручного счета на практических занятиях.

А вот тестовых заданий, которые бы проверяли уровень усвоения теоретического материала, параллельно помогая понять тонкие места теоретических вопросов, а также элементов доказательства важнейших теорем, на просторах интернета и в печатной продукции найти невозможно.

Нами завершается разработка комплекса заданий подобного направления под условным названием «*Теоретические основы высшей математики в тестах*», охватывающего следующие разделы высшей математики: элементы теории множества, пределы и непрерывность, дифференциальное и интегральное исчисление, дифференциальные уравнения, ряды, линейная алгебра и элементы геометрии n-мерных пространств, многочлены и комплексные числа.

В качестве примера приведем фрагмент заданий по одной из тем «Тригонометрические ряды Фурье». Обращаем внимание, что ответы к заданиям многовариантны, что позволяет в одном задании охватить несколько важных вопросов.

Тестовые задания, в которых проверяется знание основных понятий, например (плюсом отмечены верные ответы):

1. Две функции $f(x)$ и $g(x)$, называются ортогональными на отрезке $[a; b]$, если

– $f(x)\cdot g(x) = 0$ для любого $x \in [a;b]$;

+ $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a; b]$ и при этом $\int\limits_a^b f(x)\cdot g(x)dx = 0$;

– $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a; b]$ и при этом $\int\limits_a^b f(x)\cdot g(x)dx \neq 0$;

– $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на $[a; b]$ и при этом $\int\limits_a^b \left(f(x)+g(x)\right) dx = 0$;

– $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a; b]$ и при этом $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b g(x)dx$.

2. Среди следующих систем функций укажите основную тригонометрическую систему функций:

– $\{\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \ldots, \sin nx, \ldots\}$;

– $\{\sin x, \cos 2x, \sin 3x, \cos 4x, \ldots\}$;

– $\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x\}$;

+ $1, \sin nx, \cos nx\ {}_{n=1}^{\infty}$;

+ $\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin nx, \cos nx, \ldots\}$.

Тестовые задания, в которых проверяется знание формул:

3. Для тригонометрического ряда, составленного для функции $f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \ldots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \ldots$, $-\pi \le x \le \pi$, отметьте верные формулы коэффициентов Фурье ($n = 1, 2, 3, \ldots$):

– $a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)dx$;

+ $a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx$;

– $b_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx$;

+ $b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx$;

+ $\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$.

Тестовые задания, при выполнении которых студент должен продемонстрировать умение применять знание ключевых понятий и теорем для решения конкретных задач, обобщать изученные свойства на разные классы функций

4. Известно, что система функций $f_n(x)\ {}_{n=1}^{\infty}$ ортогональна на отрезке $[a; b]$. Укажите свойства функций, следующие из этого факта:

+ все функции системы попарно ортогональны на отрезке $[a; b]$;

– для любого $n = 1, 2, 3, \ldots$ $\int\limits_a^b f_n^2(x)dx = 0$;

+ для любого n = 1, 2, 3, … существуют $\int\limits_a^b f_n(x)dx$ и $\int\limits_a^b f_n^2(x)dx$;

+ для любого n = 1, 2, 3, … $\int\limits_a^b f_n^2(x)dx \neq 0$;

– $\int\limits_a^b f_n(x)\cdot f_k(x)dx = 0$ тогда и только тогда, когда $n = k$, $n, k \in N$.

5. Отметьте верные высказывания о функции $f(x)$, являющейся суммой степенного ряда на интервале $(a; b)$:

+ $f(x)$ непрерывна на интервале $(a; b)$;

– $f(x)$ может иметь на интервале $(a; b)$ конечное число точек разрыва 1-го рода;

+ $f(x)$ интегрируема на интервале $(a; b)$;

+ в каждой точке этого интервала $f(x)$ дифференцируема;

+ $f(x)$ бесконечно дифференцируема на интервале $(a; b)$.

6. Укажите отрезки, на которых основная тригонометрическая система функций является ортогональной:

– [0; π];

+ [0; 2π];

+ [–π; π] ;

+ [–100π; –98π];

– $[0; \frac{\pi}{2}]$.

7. Укажите, при каком значении l система функций $\left\{1, \cos\frac{\pi nx}{l}, \sin\frac{\pi nx}{l}\right\}_{n=1}^{\infty}$ ортогональна на отрезке [–2; 2]:

– $l = 2\pi$;

+ $l = 2$;

– $l = 1$;

– $l = 0$;

– $l = \frac{\pi}{2}$.

8. Из указанных систем функций отметьте те, которые ортогональны на отрезке [0; 1]:

– $1, \cos\pi nx, \sin\pi nx \;{}_{n=1}^{\infty}$;

– $\cos nx \;{}_{n=0}^{\infty}$

+ $\cos\pi nx \;{}_{n=0}^{\infty}$;

+ $\sin\pi nx \;{}_{n=1}^{\infty}$

– $\sin nx \;{}_{n=1}^{\infty}$.

9. Отметьте такие свойства функции $f(x)$, которые достаточны для выполнения условий Дирихле на отрезке $[a; b]$:

– непрерывность $f(x)$ на отрезке $[a; b]$;

– ограниченность $f(x)$ на отрезке $[a; b]$;

– интегрируемость $f(x)$ на отрезке $[a; b]$;

+ непрерывность и монотонное возрастание $f(x)$ на отрезке $[a; b]$;

+ непрерывность и монотонное убывание функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$.

10. Ряд Фурье $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi nx}{l}+b_n\sin\frac{\pi nx}{l}\right)$ для функции $f(x)$ на отрезке $[-l; l]$ является

– числовым рядом;

+ функциональным рядом;

– степенным рядом;

+ рядом по ортогональной системе функций;

– рядом Тейлора для этой функции.

11. Среди следующих высказываний укажите верные.

– Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-\pi; \pi]$, то ее ряд Фурье сходится в каждой точке этого отрезка.

+ Если произвольная интегрируемая на отрезке $[-\pi; \pi]$ функция $f(x)$ разлагается на этом отрезке в тригонометрический ряд $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx+b_n\sin nx$, то этот ряд будет рядом Фурье для функции $f(x)$.

+ Если функция $f(x)$ разлагается в равномерно сходящийся к ней на соответствующем отрезке тригонометрический ряд, то он является рядом Фурье для функции $f(x)$.

– Если ряд Фурье для непрерывной функции $f(x)$ сходится на соответствующем отрезке, то эта сходимость равномерная.

– Если тригонометрический ряд сходится к функции $f(x)$ на некотором отрезке, то он с необходимостью является рядом Фурье для этой функции.

12. Отметьте верные высказывания: если функция удовлетворяет условиям Дирихле на отрезке $[-l; l]$, то можно утверждать, что

+ ряд Фурье сходится во всех точках отрезка $[-l; l]$;

– ряд Фурье, членами которого являются непрерывные функции, сходится на отрезке $[-l; l]$ равномерно;

+ если $f(x)$ имеет точки разрыва на отрезке $[-l; l]$, то сходимость ряда Фурье на этом отрезке неравномерная;

+ если для данной функции, имеющей конечное число точек разрыва на отрезке $[-l; l]$, произвольным образом изменить ее значения в точках разрыва, то новая функция будет иметь тот же ряд Фурье, что и данная функция;

+ если функция $f(x)$ непрерывна и имеет ограниченную производную на отрезке $[-l; l]$, то ее ряд Фурье равномерно сходится к $f(x)$ на этом отрезке.

Предложенные тестовые задания предназначены для измерения и формализованной оценки знаний студентов, иллюстрируют возможность проверки усвоения теоретического материала по теме «Тригонометрические ряды Фурье».