Е.П. Мазур, Л.Л. ТУХОЛКО
БГПУ, Минск, Беларусь

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЗАДАЧ КОНСТРУКТИВНОГО ХАРАКТЕРА ДЛЯ УСВОЕНИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА ПО СТЕРЕОМЕТРИИ В X–XI КЛАССАХ

Анализ учебно-методической литературы показывает, что задачи, связанные с построением геометрических фигур и геометрических конструкций, широко применяются при изучении стереометрии в качестве средств формирования умений, комплексного применения знаний, но мало используются для организации усвоения учебного материала, то есть для обеспечения его понимания и запоминания. Продемонстрируем на примере темы «Объем пирамиды» возможности задач конструктивного характера для организации изучения отдельной темы курса стереометрии.

Под задачами конструктивного характера понимаются конструктивные геометрические задачи (формулировка которых определяет необходимость построения объекта, обладающего требуемыми свойствами, путём выбора, расположения и соединения других объектов), а также задачи, предполагающие возможность решения конструктивным методом (он состоит в построении геометрической конструкции, проявляющей связи между данными геометрическими фигурами, позволяющие анализировать свойства этих фигур и отношения между ними) [1].

С точки зрения Г.И. Саранцева, учебные задачи (упражнения) по их месту в процессе обучения математике можно разделить на следующие виды [2]: стимулирующие (мотивирующие) учебно-познавательную деятельность; организующие и осуществляющие учебно-познавательную деятельность; обеспечивающие контроль и самоконтроль эффективности учебно-познавательной деятельности.

Рассмотрим *примеры задач конструктивного характера, мотивирующих изучение учебного материала об объеме пирамиды*.

Задача 1. На рисунке 1 изображен многогранник, все рёбра которого равны *a*, и развертка его поверхности. Найдите для этого многогранника а) площадь поверхности; б) объем.

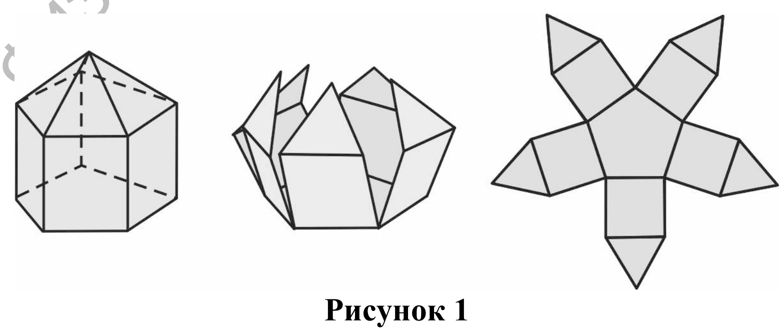
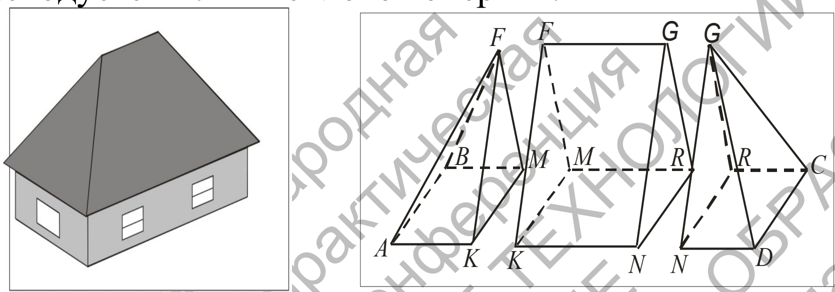


Рисунок 1

Анализируя условие задачи, учащиеся приходят к мысли о том, что для нахождения объема рассматриваемого многогранника нужно по аналогии с тем, как находится площадь его поверхности, выяснить, из каких геометрических фигур он составлен, и найти объем каждой части. При этом возникает проблемная ситуация: объем пирамиды учащиеся вычислять не умеют.

В качестве примера задачи, направленной на осознание учащимися значимости владения знаниями и умениями по теме «Объем пирамиды» в практической деятельности человека, приведем пример практико-ориентированной задачи конструктивного характера, прототипом для создания которой послужила задача из работы [3].

Задача 2. Рассчитайте удельный расход тепла на отопление утеплённого мансардного помещения дома размером 10 м × 16 м (рисунок 2, *а*) с попарно равными противоположными скатами, если высота и длина конька крыши составляют 4 м и 12 м соответственно, при условии, что на отопление 1м^3 помещения расходуется 40 Вт тепловой энергии.



а) *б)*

Рисунок 2

Для решения этой задачи нужно представить многогранник, форму которого имеет крыша, как совокупность простейших многогранников, например, двух четырехугольных пирамид и прямой треугольной призмы, (рисунок 2, *б*) и вычислить сумму их объемов. При этом понадобится знание формулы для вычисления объема пирамиды.

К числу задач, организующих и осуществляющих учебно-познавательную деятельность, относятся задачи на усвоение и применение понятий, теорем, приемов и методов решения задач. Рассмотрим *пример задачи конструктивного характера для организации деятельности учащихся по выявлению факта, отражённого в теореме об объеме пирамиды*. (Предварительно учащимся сообщается, что две треугольные пирамиды, имеющие равные высоты и равные площади оснований, имеют равные объемы.)

Задача 3. Изобразите треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$ и постройте сечение этой призмы плоскостью A_1BC.

1) Определите вид многогранников, полученных при пересечении этой призмы плоскостью A_1BC.
2) Разделите четырёхугольную пирамиду $A_1BCC_1B_1$ на две треугольные пирамиды.
3) Найдите пары пирамид, имеющих равные объёмы. Ответ обоснуйте.
4) Выясните, как связаны объёмы этих пирамид и объём треугольной призмы.

5) Вспомните формулу для вычисления объема призмы и назовите формулу для вычисления объема треугольной пирамиды.

Задача 4. Рассмотрите произвольную шестиугольную пирамиду.

1) Разбейте её диагональными сечениями на треугольные пирамиды с общей вершиной.
2) Выясните, как связаны объём шестиугольной пирамиды и объёмы составляющих её треугольных пирамид.
3) Вспомните формулу для вычисления объема треугольной пирамиды и назовите формулу для вычисления объема шестиугольной пирамиды.
4) Сформулируйте гипотезу об объёме произвольной пирамиды.

Рассмотрим *пример задачи конструктивного характера для запоминания формулы объема пирамиды*, при решении которой учащиеся должны дополнить данную конструкцию элементами, достаточными для нахождения объёма пирамиды, и исключить ошибочные утверждения, в которых варьируются типичные ошибки учащихся.

Задача 5. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и O – точка пересечения диагоналей грани DD_1C_1C (рисунок 3). Верно ли, что

1) объем V пирамиды $AODC$ можно вычислить по формуле $V = S_{ODC} \cdot AD$;
2) объем V пирамиды $DCBC_1$ можно вычислить по формуле $V = \frac{1}{3} S_{CC_1B} \cdot CD$;
3) объем V пирамиды OAA_1B_1B можно вычислить по формуле $V = \frac{1}{3} S_{AA_1B_1B} \cdot AO$;
4) объем V пирамиды OAA_1B_1B можно вычислить по формуле $V = \frac{1}{3} S_{AA_1B_1B} \cdot AB$;
5) объем V пирамиды $ADCC_1D_1$ можно вычислить по формуле $V = \frac{1}{3} S_{ADC} \cdot CC_1$?

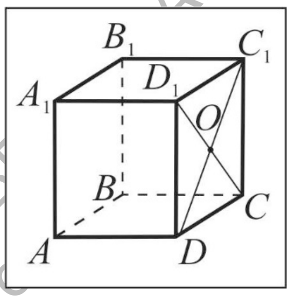


Рисунок 3

Рассмотрим *примеры задач конструктивного характера на усвоение метода доказательства теоремы об объеме пирамиды и отражённого в ней факта*.

Задача 6. В треугольной пирамиде $SABC$ точки M и N лежат на ребре AB так, что $AM = MN = NB$, точки K и F лежат на ребре SC так, что $SK = KF = FC$. Объем пирамиды $SABC$ равен 72 см^3. Вычислите объемы следующих пирамид: а) $FCMN$; б) $KANC$.

Задача 7. Дана треугольная пирамида $SABC$. Найдите её объем, если объём пирамиды $OBCE$, где O и E – точки пересечения медиан граней ABC и SBC соответственно, равен 5 см^3.

Задача 8 (является опорной). Противолежащие рёбра треугольной пирамиды попарно равны. Найдите объем этой пирамиды, если длины сторон её основания равны a, b, c. [4]

Задачи конструктивного характера можно использовать в качестве средства контроля за усвоением знаний. Рассмотрим пример системы таких задач по теме «Объем пирамиды», разработанных в соответствии с нормами оценки результатов учебной деятельности учащихся по математике.

Задача 9 *(1-2 балла).* $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямой параллелепипед. Укажите формулу для вычисления объема V пирамиды B_1BDC (рисунок 4).

а) $V=\frac{1}{3}S_{ABCD}\cdot BB_1$; *б)* $V=S_{BCD}\cdot BB_1$; *в)* $V=\frac{1}{3}S_{BCD}\cdot BB_1$; *в)* $V=\frac{1}{3}S_{BCD}\cdot B_1C$.

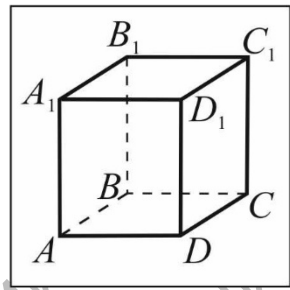


Рисунок 4

Задача 10 *(3-4 балла).* В пирамиде $SABC$ отрезок BM – медиана грани ABC. Найдите объём пирамиды $MSBC$, если объём пирамиды $SABC$ равен 100 см^3.

Задача 11 *(5-6 баллов).* Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите объем V пирамиды $SABCD$, если S – точка пересечения диагоналей A_1C_1 и B_1D_1, а длина стороны куба равна 3 см.

Задача 12 *(7-8 баллов).* В правильной призме $ABCA_1B_1C_1$ через прямую A_1L, где точка L – середина ребра AC, проведено сечение плоскостью, параллельной прямой B_1C_1. Найдите объем пирамиды, отсекаемой этой плоскостью, если $AB = AA_1 = 12$ см.

Задача 13 *(9-10 баллов).* Все рёбра четырёхугольной пирамиды $SABCD$ равны между собой, точка K лежит на ребре AB, точка M – на отрезке EF, где точки E и F – середины рёбер SD и SC соответственно. Найдите объём пирамиды $SABCD$, если объём пирамиды $MKDC$ равен 12,5 см^3.

Таким образом, задачи конструктивного характера в курсе стереометрии наряду с функциями формирования умений, комплексного применения знаний, развития пространственного и логического мышления учащихся, их конструктивных навыков могут выполнять функции стимулирования (мотивации) учебно-познавательной деятельности, её организации и осуществления, а также обеспечения контроля и самоконтроля эффективности этой деятельности.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Тухолко, Л.Л.* Развитие конструктивной деятельности учащихся при обучении стереометрии : монография / Л.Л. Тухолко. – Минск : БГПУ, 2019. – 248 с.

2. *Саранцев, Г. И.* Упражнения в обучении математике / Г. И. Саранцев – М. : Просвещение, 2005. – 256с.

3. *Карневич, О.Н.* Контекстные задачи как интегративное средство формирования умений учащихся применять геометрические знания на практике / О. Н. Карневич // Матэматыка. – 2017. – № 2. – С. 9–21.

4. *Шарыгин*, *И. Ф.* Факультативный курс по математике: Решение задач: учеб. пособие для 11 кл. сред. шк. / И. Ф. Шарыгин, В. И. Голубев. – М., 1991. – 384 с.