С.А. БОГДАНОВИЧ
БГПУ (Минск, Беларусь)
А.А. ЕРМОЛИЦКИЙ
БГУИР (Минск, Беларусь)

ГИПЕРКОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И РИМАНОВЫ МНОГООБРАЗИЯ

Пусть M — любое паракомпактное, гладкое, действительное многообразие размерности *n*, $M^2 = M \times M = \{(x;y) \mid x, y \in M\}$, $M^4 = M^2 \times M^2 = \{(x;y;u;v) \mid x,y,u,v \in M\}$; $\Delta(M^2) = \{(x;x) \in M^2\}$, $\Delta(M^4) = \{(x;x;x;x) \in M^4\}$ — диагонали в M^2, M^4 соответственно. Очевидно, что многообразия $\Delta(M^2)$ и $\Delta(M^4)$ диффеоморфны M $\left(\Delta(M^2) \cong \Delta(M^4) \cong M\right)$.

Теорема 1 [1]. *Пусть* (M, ∇) *— многообразие со связностью,* $\pi : TM \to M$ *— каноническая проекция. Тогда существует такая окрестность* N_0 *нулевого сечение* O_M *в TM, что отображение*

$$\varphi : \pi \times Exp : X \to \left(\pi(X), Exp_{\pi(x)} X\right)$$

является диффеоморфизмом N_0 *на окрестность* N_Δ *диагонали* $\Delta(M^2)$.

Например, в качестве связности ∇ можно взять каноническую связность любой римановой метрики на многообразии *M*.

Некоторые результаты, полученные в [2], могут быть сформулированы в виде следующей теоремы.

Теорема 2. *Существует окрестность* N_0 *нулевого сечение* $O_M \cong M$ *в TM и почти эрмитова структура* $(\bar{J}, \bar{g})$ *на* N_0 *такая, что* $(N_0, \bar{J}, \bar{g})$ *— кэлерово многообразие и* $O_M \cong M$ *— вполне геодезическое подмногообразие* $(N_0, \bar{J}, \bar{g})$.

Комбинируя теоремы 1, 2, получаем следующую теорему.

Теорема 3. *Диффеоморфизм* φ *индуцирует кэлерову структуру на окрестности* N_Δ *диагонали* $\Delta(M^2)$, *при этом диагональ* $\Delta(M^2) \cong M$ *является вполне геодезическим подмногообразием многообразия* N_Δ.

Замечание 1. Комплексная структура кэлерова многообразия N_Δ не совместима со структурой произведения на M^2. Это значит, что если $z_l, l = \overline{1,n}$, — комплексные координаты точки $(x;y) \in N_\Delta$, то, вообще говоря, не существует таких действительных координат $x_l, y_l, l = \overline{1,n}$, точек $x; y \in M$ соответственно, что $z_l = x_l + iy_l, i^2 = -1$.

Отдельные результаты, полученные в [3], могут быть сформулированы в виде следующей теоремы.

Теорема 4. *Пусть (M, J, g) — кэлерово многообразие. Тогда существует окрестность* N_0 *нулевого сечения* $O_M \cong M$ *в TM и гиперкэлерова структура* $(J_1, J_2, J_3, \bar{g})$ на N_0 *такие, что* $O_M \cong M$ *является вполне геодезическим* *подмногообразием гиперкэлерова многообразия* $(N_0, J_1, J_2, J_3, \overline{g})$, $\overline{g}_{|O_M} = g,\ J_{2|O_M} = J$.

Комбинируя теоремы 1, 3, 4, получаем следующую теорему.

Теорема 5. *Существует гиперкэлерова структура на окрестности* $\overline{N}_\Delta$ *диагонали* $\Delta(M^4)$, *при этом диагональ* $\Delta(M^4) \cong M$ *является вполне геодезическим подмногообразием гиперкэлерова многообразия* $\overline{N}_\Delta$.

Замечание 2. Гиперкомплексная структура гиперкэлерова многообразия $\overline{N}_\Delta$ не совместима со структурой произведения M^4. Это значит, что если $q_l,\ l = \overline{1,n}$, — гиперкомплексные координаты $(x; y; u; v) \in \overline{N}_\Delta$, то, вообще говоря, не существует таких действительных координат $x_l, y_l, u_l, v_l, l = \overline{1,n}$, точек $x,\ y,\ u,\ v \in M$ соответственно, что $q_l = x_l + iy_l + ju_l + kV_l,\ i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = -ji = k$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Громол, Д. Риманова геометрия в целом / Д. Громол, В. Клингенберг, В. Мейер. – М., 1971. – 343 с.

2. Ermolitski, A.A. Deformations of structures, embedding of Riemannian manifold in a Kahlerian one and geometric antigravitation / A.A. Ermolitski. – Warszawa, Banach Center Publications, v. 76, 2007. – p. 505–514.

3. Ermolitski, A.A. Embeddings of Almost Hermitian Manifolds in Almost Hyper Hermitian Manifold and Complex (Hypercomplex) Numbers in Riemannian Geometry / A.A. Ermolitski. – Applied mathematics, vol. 5, Number 16, 2014. – P. 2464-2475.