

Соболь В.Р. (д.ф.-м.н., проф., БГПУ, зав. кафедрой)  
Федоров Ч.М. (к.п.-н., доц., БГПУ, инж. прогр.)  
Апанович Е.А. (гимн. №20, уч. физики высш. кат.)  
Хвалько Е.А. (БГПУ, студент)

### **Формализм формул Френеля при некоторых представлениях отражения поляризованной в плоскости падения волны.**

**Введение.** Закон преломления света на границе раздела двух сред, связывающий углы падения и преломления с показателями преломления широко рассматривается и анализируется на занятиях учащихся в средних учреждениях образования и в студенческих аудиториях. Восходя своими корнями к представлениям древних исследователей, что свет это поток особых частиц, а именно, корпускул светоносного эфира, движение которых и создает воспринимаемые человеком электромагнитные волны, явление преломления и отражения света ранее трактовалось с позиций законов классической механики. При отражении взаимодействие по принципу абсолютно упругого удара изменяло нормальную составляющую импульса на границе на противоположное значение при неизменности тангенциальной составляющей, что позволяло объяснить равенство углов падения и отражения. При вхождении в более плотную среду нормальная к границе раздела компонента импульса уменьшалась, равно как и скорость, что приводило к меньшему значению угла преломления в сравнении с углом падения.

Исходя из современных представлений закон Снеллиуса можно легко проинтерпретировать на основе основных уравнений электродинамики. Уравнения Максвелла сформулированные на основе эмпирических исследований Ньютона, Эрстеда, Фарадея, Гаука, Ома и других исследователей имеют интегральную и дифференциальную форму. Интегральная форма представляет закономерности, которые возможно реализовать в экспериментальных и технических приложениях, что сейчас широко и используется. Дифференциальная форма уравнений Максвелла отображает свойства самого электромагнитного поля вообще и для ряда частных случаев, например для постоянного электрического поля, для постоянного магнитного поля, для так называемого квазистационарного электромагнитного поля, а именно переменного поля низких, в том числе и промышленных частот. В системе единиц СИ электромагнитное поле характеризуется векторами индукции и напряженности магнитной составляющей, а также векторами индукции (смещения) и напряженности электрической компоненты. Дифференциальные уравнения для поля позволяют написать так называемые граничные соотношения для всех четырех векторов на интерфейсе двух сред. Так, из условий для циркуляции векторов напряженности электрического и магнитного полей следует, что тангенциальные составляющие этих векторов на границе раздела непрерывны. Из условий для потока вектора индукции через границу раздела следует – нормальные составляющие векторов магнитной и электрической индукции (при отсутствии поверхностных зарядов) также непрерывны. Записав процесс взаимодействия электромагнитной волны в виде падающей волны, отраженной и преломленной и используя условия неразрывности легко выразить соотношение между падающим и преломленным лучом через углы падения/преломления и показатели преломления по обе стороны границы. Указанная процедура позволяет сформулировать закон преломления на границе раздела изотропная среда/изотропная среда, изотропная среда/анизотропная среда и т.д. Но следует помнить, что соотношения для определяемых углов преломления отвечают волновым векторам, совпадающим с волновыми нормальными. Поток же энергии, то есть световая мощность, может распространяться в ином направлении, не по закону Снеллиуса, что действительно имеет место при двойном лучепреломлении [1 - 4].

**Постановка задачи.** Формулы Френеля сформулированные для описания коэффициента отражения и преломления плоской волны содержат только два параметра – углы преломления и падения на границе двух изотропных прозрачных сред. Углы являются однозначными функциями диэлектрических проницаемостей, являющихся в этом приближении тензорами нулевого ранга, то есть скалярными величинами. При падении света из вакуума на прозрачную анизотропную среду проницаемости становятся тензорами второго ранга, которые в общем случае могут выглядеть как

$$\hat{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \hat{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{pmatrix}$$

Естественно, при записи соотношений Френеля для соотношения между амплитудами и для самого отражения по энергии в них должны быть неким образом представлены те или иные компоненты данных тензоров в зависимости от конкретного случая поляризации волны. Ниже рассмотрены соотношения Френеля для отражения волны в частном случае поляризации света в плоскости падения. Также представлен закон преломления для угла преломления в функции угла падения.

**Процедура анализа, результаты, обсуждение.** Рассмотрение проведено в соответствии с классическими канонами электродинамики на основании условий неразрывности составляющих электромагнитной волны на интерфейсе при условии тензорных соотношений связи между векторами индукции и напряженности электрического и магнитного полей волны через материальные константы. Получены соотношения для амплитуд падающей и отраженной волны при ориентации вектора напряженности электрического поля в плоскости падения XOY, в которой лежит и волновой вектор. Угол падения представлен как функция угла преломления, который изменяется в диапазоне значений до угла Брюстера и более. Для некоторых значений компонент тензоров материальных констант на платформе MathCad смоделирована кинетика коэффициента отражения. Полученные выражения отвечают принципу предельного перехода, то есть при занулении всех недиагональных компонент тензоров диэлектрической и магнитной проницаемости, при приведении их к скалярному виду сформулированные соотношения трансформируются к классическому представлению Френеля.

Ниже представлены соотношения Френеля при отражении плоской поляризованной в плоскости падения волны от границы раздела двух изотропных сред со значением диэлектрической проницаемости

$$\epsilon_1 := 1 \quad \text{и} \quad \epsilon_2 := 4$$

а также и при отражении упомянутой волны от границы раздела вакуум/анизотропная среда, для которой выбраны значения компонент тензоров вида

$$\epsilon_{XX} := 4$$

$$\epsilon_{YY} := 4$$

$$\epsilon_{ZZ} := 4$$

$$\epsilon_{XY} := 0.04$$

$$\epsilon_{YX} := 0.04$$

$$\mu_{YY} := 1$$

$$\mu_{ZZ} := 1$$

$$\mu_{XZ} := 2$$

$$\mu_{XY} := 2$$

$$\mu_{YZ} := 2$$

Для конечного диапазона изменения угла преломления

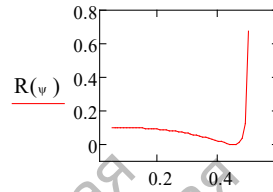
$$\psi := 0.05, 0.06 \dots 0.6$$

Представлены известные соотношения для амплитуд и их квадратов для интерфейса изотропных сред

$$r1(\psi) := \frac{\cos(\varphi1(\psi)) - \frac{\varepsilon1}{\varepsilon2} \frac{\sin(\varphi1(\psi))}{\sin(\psi)} [(\cos(\psi))^2]^{0.5}}{\cos(\varphi1(\psi)) + \frac{\varepsilon1}{\varepsilon2} \frac{\sin(\varphi1(\psi))}{\sin(\psi)} [(\cos(\psi))^2]^{0.5}}$$

$$R1(\psi) := \left[ \frac{\cos(\varphi1(\psi)) - \frac{\varepsilon1}{\varepsilon2} \frac{\sin(\varphi1(\psi))}{\sin(\psi)} [(\cos(\psi))^2]^{0.5}}{\cos(\varphi1(\psi)) + \frac{\varepsilon1}{\varepsilon2} \frac{\sin(\varphi1(\psi))}{\sin(\psi)} [(\cos(\psi))^2]^{0.5}} \right]^2$$

Зависимость коэффициента отражения для интерфейса изотропных сред при соотношении проницаемостей  $\frac{1}{4}$  отображена на рис.1



**Рис. 1 Классический вид коэффициента отражения поляризованной в плоскости падения волны на границе изотропных сред с диэлектрическими проницаемостями 1 и 4 в функции угла преломления.**

Ниже отображена зависимость угла падения в функции угла преломления на границе вакуум/анизотропная среда

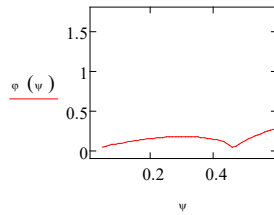
$$\varphi(\psi) := \text{asin} \left[ \frac{\sin(\psi) \cdot (\cos(\psi))^{0.5}}{\varepsilon1^{0.5}} \left[ \frac{(\varepsilon_{xy} \cdot \sin(\psi) - \varepsilon_{yy} \cdot \cos(\psi))^2}{(\varepsilon_{xy} \cdot \varepsilon_{yx} - \varepsilon_{yy} \cdot \varepsilon_{xx})^2} + \frac{(\mu_{xz} \cdot \mu_{yy} - \mu_{yz} \cdot \mu_{xy})^2}{(\mu_{xy} \cdot \sin(\psi) - \mu_{yy} \cdot \cos(\psi))^2} \left( \frac{1}{\mu_{zz} \cdot \varepsilon_{xx}} + \frac{1}{\mu_{zz} \cdot \varepsilon_{yy}} \right)^2 \right]^{0.25} \right]$$

Соотношение для углов согласуется с соотношением для амплитуд и их квадратов при отражении

$$r(\psi) := \frac{\cos(\varphi(\psi)) - \varepsilon1 \frac{\sin(\varphi(\psi))}{\sin(\psi)} \left[ \frac{(\varepsilon_{xy} \cdot \sin(\psi) - \varepsilon_{yy} \cdot \cos(\psi))^2}{(\varepsilon_{xy} \cdot \varepsilon_{yx} - \varepsilon_{yy} \cdot \varepsilon_{xx})^2} + \frac{(\mu_{xz} \cdot \mu_{yy} - \mu_{yz} \cdot \mu_{xy})^2}{(\mu_{xy} \cdot \sin(\psi) - \mu_{yy} \cdot \cos(\psi))^2} \left( \frac{1}{\mu_{zz} \cdot \varepsilon_{xx}} + \frac{1}{\mu_{zz} \cdot \varepsilon_{yy}} \right)^2 \right]^{0.5}}{\cos(\varphi(\psi)) + \varepsilon1 \frac{\sin(\varphi(\psi))}{\sin(\psi)} \left[ \frac{(\varepsilon_{xy} \cdot \sin(\psi) - \varepsilon_{yy} \cdot \cos(\psi))^2}{(\varepsilon_{xy} \cdot \varepsilon_{yx} - \varepsilon_{yy} \cdot \varepsilon_{xx})^2} + \frac{(\mu_{xz} \cdot \mu_{yy} - \mu_{yz} \cdot \mu_{xy})^2}{(\mu_{xy} \cdot \sin(\psi) - \mu_{yy} \cdot \cos(\psi))^2} \left( \frac{1}{\mu_{zz} \cdot \varepsilon_{xx}} + \frac{1}{\mu_{zz} \cdot \varepsilon_{yy}} \right)^2 \right]^{0.5}}$$

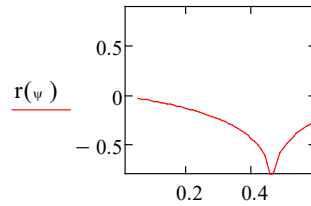
$$R(\psi) := \left[ \frac{\cos(\varphi(\psi)) - \varepsilon1 \frac{\sin(\varphi(\psi))}{\sin(\psi)} \left[ \frac{(\varepsilon_{xy} \cdot \sin(\psi) - \varepsilon_{yy} \cdot \cos(\psi))^2}{(\varepsilon_{xy} \cdot \varepsilon_{yx} - \varepsilon_{yy} \cdot \varepsilon_{xx})^2} + \frac{(\mu_{xz} \cdot \mu_{yy} - \mu_{yz} \cdot \mu_{xy})^2}{(\mu_{xy} \cdot \sin(\psi) - \mu_{yy} \cdot \cos(\psi))^2} \left( \frac{1}{\mu_{zz} \cdot \varepsilon_{xx}} + \frac{1}{\mu_{zz} \cdot \varepsilon_{yy}} \right)^2 \right]^{0.5}}{\cos(\varphi(\psi)) + \varepsilon1 \frac{\sin(\varphi(\psi))}{\sin(\psi)} \left[ \frac{(\varepsilon_{xy} \cdot \sin(\psi) - \varepsilon_{yy} \cdot \cos(\psi))^2}{(\varepsilon_{xy} \cdot \varepsilon_{yx} - \varepsilon_{yy} \cdot \varepsilon_{xx})^2} + \frac{(\mu_{xz} \cdot \mu_{yy} - \mu_{yz} \cdot \mu_{xy})^2}{(\mu_{xy} \cdot \sin(\psi) - \mu_{yy} \cdot \cos(\psi))^2} \left( \frac{1}{\mu_{zz} \cdot \varepsilon_{xx}} + \frac{1}{\mu_{zz} \cdot \varepsilon_{yy}} \right)^2 \right]^{0.5}} \right]^2$$

Для указанного ранее набора значений компонент тензоров проницаемостей зависимость между углами падения и преломления отвечает рисунку 2



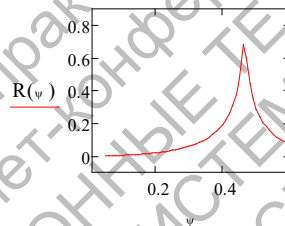
**Рис. 2 Угол падения как функция угла отражения на интерфейсе вакуум/анизотропная среда в функции угла преломления**

Соотношение для амплитуд для отраженной и падающей волн на интерфейсе вакуум/анизотропная среда представлено на рис. 3



**Рис. 3. Отношение амплитуды отраженной волны к амплитуде падающей волны при ее ориентации ( $k_z = 0$ ) и поляризации в плоскости падения XOY (в функции угла преломления)**

Ниже (рис. 4) представлен коэффициент отражения света в функции угла преломления для той же волны (параметры анизотропии представлены в начале графического блока).



**Рис. 4. Вид коэффициента отражения света в функции угла преломления для плоской волны, поляризованной в плоскости падения (ориентация и поляризации в плоскости падения XOY,  $k_z = 0$ ) на границе изотропная среда (вакуум) / анизотропная среда.**

**Заключение.** Описание отражения света при его падении под произвольным углом в какой то степени нивелирует ценность процедуры приведения тензоров материальных констант к главным осям ввиду того, что такая акция может быть действительна только для одного значения угла, для одной точки. В широком спектре значений углов понятие главных направлений теряет значимость так как их следует увязывать с нормалью к поверхности отражающей среды. Тем более, если рассматривается ситуация в которой тензор констант вообще не является симметричным, что возможно при рассмотрении сред класса мультиферроиков. Комплексные среды в задачах отражения/преломления вполне целесообразней анализировать с общих позиций определения возможного вида тензора второго ранга для материальных констант с возможностью перехода к частному случаю на основе координатного представления соотношений Френеля.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лансберг Г.С. Оптика / Г.С. Лансберг.– М.: Физматлит, 2003. – 848с.
2. Сивухин Д.В. Общий курс физики: Оптика / Д.В. Сивухин. – М.: Физматлит, 2005. – 792 с.
3. Савельев И.В. Курс общей физики: В 5 кн./ И.В. Савельев.– М.: Аст -Пресс, 2005.– Кн.4: Волны. Оптика. – 256 с.
4. Королёв Ф.А. Курс физики: Оптика, атомная и ядерная физика / Ф.А. Королёв. – М.: Просвещение, 2001. – 608 с.