СПИВАК-ЛАВРОВ И.Ф.
АРУ им. К.Жубанова (Актобе, Казахстан)

КОМПЬЮТЕРНЫЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ ЧИСЕЛ И ПРОБЛЕМА БЛИЗНЕЦОВ

Компьютерные методы обработки информации проникают во все области человеческой деятельности. Особенно активно они используются для численного решения задач физики, астрономии и техники. Здесь можно отметить и управление с помощью компьютера различными физическими приборами и установками, компьютерную обработку экспериментальных данных и компьютерное моделирования различных физических задач и др. В последнее время компьютерное моделирование стало использоваться и для решения чисто математических задач, в частности, задач теории чисел. Общеизвестны задачи вычисления трансцендентных чисел, например, числа $\pi = 3.14159265358979...$ и $e = 2.71828182845905...$, которые сейчас вычислены с колоссальной точностью. Компьютерное моделирование является одним из эффективных методов изучения самых различных проблем. Часто компьютерные модели проще и удобнее исследовать, чем реальные системы. Они позволяют проводить вычислительные эксперименты, реальная постановка которых затруднена или может дать непредсказуемый результат. Компьютерные модели позволяют выявить основные факторы, определяющие свойства изучаемых объектов, исследовать отклик системы на изменения ее параметров и начальных условий.

В качестве инструментария для компьютерного моделирования мы используем электронные таблицы Microsoft Excel. Это связано с большой гибкостью и широчайшими возможностями Excel, что, к сожалению, не до конца осознается преподавателями при изучении информатики. Excel можно использовать и как обычный калькулятор, и как табличный процессор, и как мощную среду объектно-ориентированного программирования на языке Visual Basic for Application (VBA) [1-4].

1. Основные свойства простых чисел.

1.1 Простое и составное число. Всякое натуральное число $p > 1$, не имеющее других натуральных делителей, кроме 1 и p, называется простым. Натуральные числа, отличные от 1 и не являющиеся простыми, называются составными. Число 1 не считается ни простым, ни составным.

1.2 Основная теорема арифметики. Всякое натуральное число a, кроме 1, может быть представлено как произведение простых множителей

$$a = p_1 p_2 \dots p_n, \tag{1}$$

причем единственным образом, если не обращать внимания на порядок сомножителей. Представление (1) называется разложением числа a на простые множители. Среди простых сомножителей представления (1) могут быть и равные. Если обозначить различные из них через $p_1, p_2, \ldots, p_k$ и допустить, что они встречаются соответственно $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ раз, то получается представление

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}, \quad (2)$$

которое называется каноническим.

1.3 О бесконечности простых чисел.

Теорема Евклида. Существует бесконечно много простых чисел.

1.4 Задача Эйлера. Понимая, что задача нахождения всех простых делителей натуральных чисел может быть достаточно сложной, Леонард Эйлер в свое время предложил следующую задачу, которую достаточно сложно решить с помощью простого перебора: «Выяснить является ли число 100895598169 простым».

С помощью созданной нами компьютерной программы мы решили эту задачу и показали, что число предложенное Эйлером не является простым. У этого числа есть один простой делитель – 112303, т.е. число Эйлера может быть представлено в виде произведения двух простых чисел: $112303 \cdot 898423 = 100895598169$

1.5 Проблема близнецов. Близнецами называются простые числа, отличающиеся друг от друга на 2. Одной из нерешенных проблем при изучении близнецов является задача о количестве близнецов: при увеличении значений простых чисел количество близнецов убывает, но каким образом? Эта проблема исследуется в настоящей работе численными методами.

2. Алгоритмы программ

2.1 Была создана программа, создающая таблицу простых чисел. Простые числа находятся нами с помощью простого алгоритма. Перебираются все натуральные числа от 2 до N и из них выбираются все простые, т.е. те, которые не делятся нацело ни на одно из чисел от 2 до $\mathrm{Int}\sqrt{N+1}$. Выясняется это с помощью следующей простой процедуры функции:

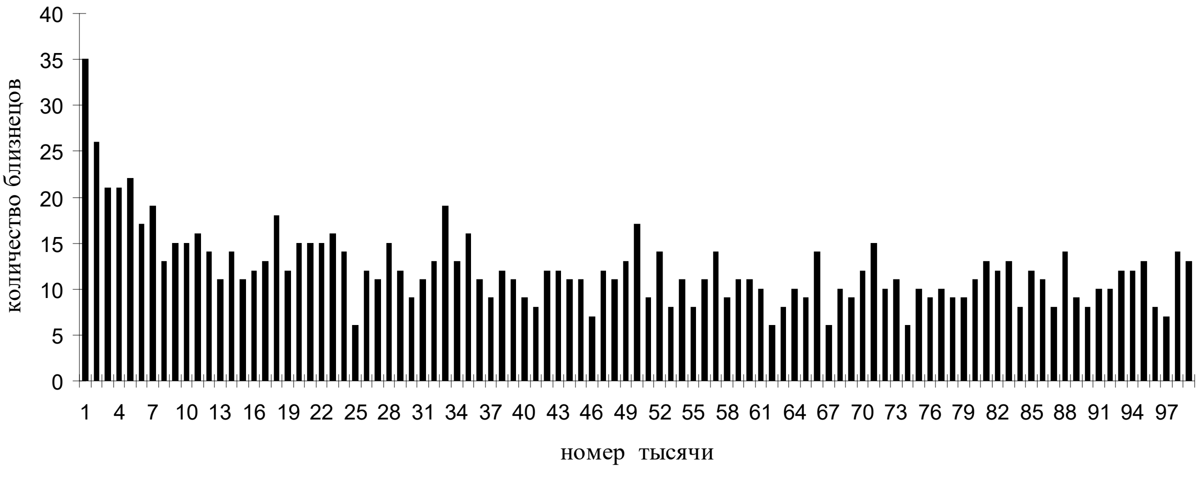
```
Function FractR(Number, NA)
' Функция возвращает значение False, если число Number не делится
' нацело  на NA, иначе – True
Number1 = Int(Number / NA)
Number2 = Int(Number1 * NA)
If (Number - Number2) = 0
Then     FractR = True
Else     FractR = False
End If
End Function
```

Таким образом нами были найдены все простые числа вплоть до $N_{\max} = 1000500$. Таких простых чисел оказалось $N_p = 78866$. Они были найдены с помощью программы SIMPLDIV(). Все эти простые числа были записаны на лист «Пр. числа» по 10000 чисел в каждом столбце, начиная с первого столбца. Эта таблица простых чисел использовались нами при нахождении простых делителей и исследовании проблемы близнецов. Во всех процедурах этой программы и всех остальных программ используется машинное представление целых чисел в формате – длинных целых (Long). В этом формате все целые числа представляются в двоичной системе, при этом наибольшее целое число в этом формате $2^{31} = 2147483648648$.

2.2 Была создана программа Division( ), находящая все простые делители целого числа N. Число N последовательно делится на все простые числа, начиная с 2 и кончая числом $\sqrt{N+1}$, с помощью уже описанной выше процедуры функции Function FractR(Number, NA). Все простые делители и остатки от последовательных делений числа N записываются последовательно в соответствующие столбцы листа «Делители», кроме записывается количество простых делителей. Программа запускается с помощью кнопки «Простые делители». При каждом запуске программы предыдущие данные стираются.

2.3 Программа по проблеме «Близнецы». Для исследования проблемы близнецов используется программа Twins. С листа «Пр. числа» в массив ArrNum считываются все простые числа. Путем анализа элементов этого массива выявляются все близнецы p и q, для которых $q = p + 2$. После этого исследуется распределение близнецов при группировке их по последовательным тысячам, десяткам тысяч и сотням тысяч. Определенную проблему создают ситуации, при которых один близнец находится в одной тысяче, а другой в следующей тысяче и т.п., например, 2999 и 3001. В такой ситуации мы относили близнеца к предыдущей тысяче.

На графиках на Рис. 1 приведено полученное с помощью программы Twins распределение близнецов по тысячам и сотням тысяч в первом миллионе натуральных чисел. Из этих графиков видно, что при усреднении количества близнецов по сотням тысяч осцилляции их количества, имеющие место при усреднении по тысячам и десяткам тысяч, прекращаются и график становится плавным. На нем наблюдается монотонное медленное уменьшение количества близнецов. Возможно, с увеличением величины чисел количество близнецов стабилизируется. Однако для выявления вида функциональной зависимости распределения близнецов необходимы более детальные исследования.



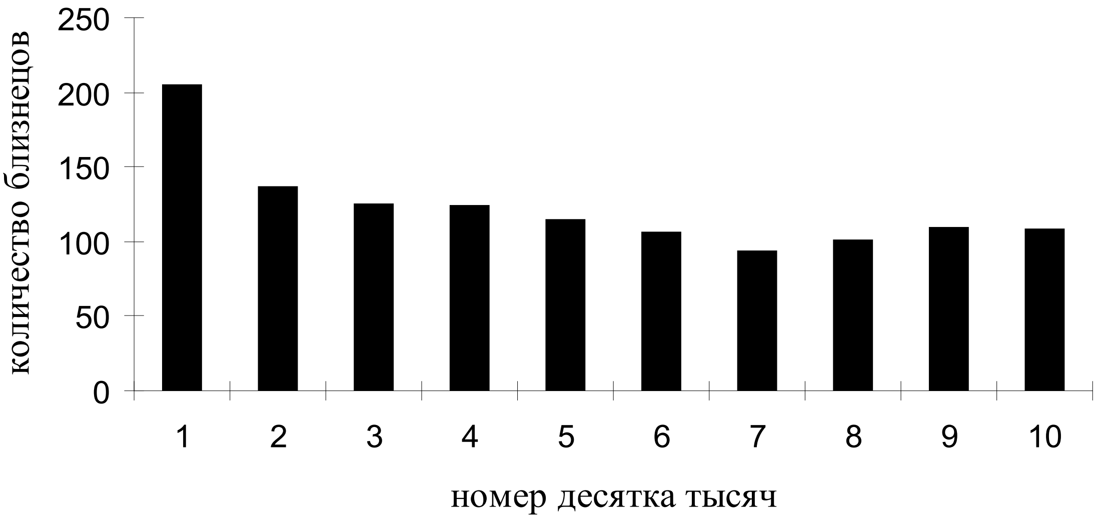


Рис. 1. Распределение близнецов в первом миллионе целых чисел.

В работе показана эффективность использования компьютерных методов при решении некоторых задач теории чисел. Созданы компьютерные программы, позволяющих находить простые делители целых чисел и изучать распределение простых чисел близнецов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Куртер Дж., Маркви А.. Microsoft office 2000: учебный курс. / Дж. Куртер. – СПб: Питер, 2001. – 256 с.

2. Ковальски С. Excel 2000. Русская версия / С. Ковальски. – М.: "Бином", 2000. – 224 с.

3. Гладких А., Чиртик А. Excel. Трюки и эффекты. / А.Гладких. – СПб.: Питер, 2006. – 189 с.