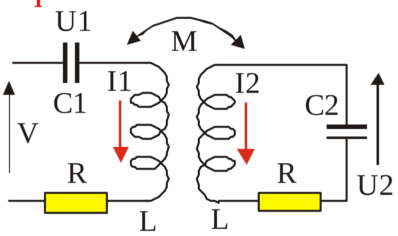
Retour à l'applet

Couplage par induction mutuelle

Equations du circuit



On considère deux circuit R, L, C série couplés par induction mutuelle. Les deux inductances sont identiques ainsi que les résistances. Le circuit de gauche est excité par une tension v(t) *sinusoïdale*. On étudie le courant dans chaque circuit.

A chaque instant, on a les équations :

$$L\frac{dI_1}{dt}+RI_1+\frac{Q_1}{C_1}+M\frac{dI_2}{dt}=v(t) \quad ; \quad L\frac{dI_2}{dt}+RI_2+\frac{Q_2}{C_2}+M\frac{dI_1}{dt}=0$$

En dérivant, on tire :

$$L\frac{d^2I_1}{dt^2}+R\frac{dI_1}{dt}+\frac{I_1}{C_1}+M\frac{d^2I_2}{dt^2}=\frac{dv(t)}{dt} \quad ; \quad L\frac{d^2I_2}{dt^2}+R\frac{dI_2}{dt}+\frac{I_2}{C_2}+M\frac{d^2I_1}{dt^2}=0$$

Régime libre

On charge le condensateur C_1 puis on ferme le circuit de gauche. Pour étudier le **régime libre**, on peut intégrer numériquement le système d'équations ci-dessus.

Régime forcé permanent

On utilise les impédances complexes en posant :

$$Z_1=R+j\left(L\omega-\frac{1}{C_1\omega}\right)=R+jX_1 \quad ; \quad Z_2=R+j\left(L\omega-\frac{1}{C_2\omega}\right)=R+jX_2 \quad ; \quad M=mL$$

$$V=Z_1I_1+jM\omega I_2 \quad ; \quad 0=Z_2I_2+jM\omega I_1$$

$$V=\left(Z_1+M^2\omega^2/Z_2\right)I_1$$

On tire :

$$I_1=\frac{Z_2V}{Z_1Z_2+M^2\omega^2} \quad ; \quad I_2=\frac{-jM\omega V}{Z_1Z_2+M^2\omega^2}$$

On peut poursuivre l'étude sous la forme littérale mais les calculs sont assez pénibles. Le calcul numérique permet de cerner simplement les phénomènes. On peut toutefois faire les remarques suivantes :

❒ On prend les *deux circuits identiques* ; leur fréquence propre est $\omega_0=1/\sqrt{LC}$. Pour chercher la valeur maximale de I_2, on peut dans une première étape négliger les résistances. Il vient :

Z_1 = jX et Z_2 = jX et I2 = $-jM\omega V/(X^2 - M^2\omega^2)$.

I2 est maximum si X = ± Mω soit : $L\omega-\dfrac{1}{C\omega}=\pm mL\omega$ ou encore pour : $\omega=\dfrac{\omega_0}{\sqrt{1\pm m}}$

❒ La relation $V=\left(Z_1+M^2\omega^2/Z_2\right)I_1$ montre que la partie réelle du circuit de gauche est toujours plus grande que celle du même circuit non couplé : Le couplage amorti le premier circuit (Sa réactance est aussi modifiée et elle peut être positive ou négative).

❒ On peut montrer que pour les deux circuits couplés, la valeur de M qui donne la valeur maximum de I_2 est telle que $M^2\omega^2 = Z_1Z_2$.

Pour deux circuits identiques accordés $Z_1 = Z_2 = R$: le coefficient de couplage optimal vaut donc $m=\dfrac{R}{L\omega_0}=\dfrac{1}{Q}$

Retour à l'applet