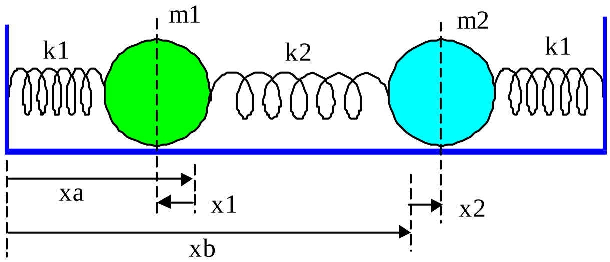
Retour au menu

Systèmes couplés



Le plus simple des systèmes couplés est formé par deux masses m_1 et m_2 pouvant glisser sans frottement sur un plan horizontal et par deux ressorts de raideur k_1. Les deux masses sont également reliées par un ressort de raideur k_2. On négligera les masses des ressorts. Les abscisses des positions d'équilibre des masses sont x_A et x_B. Les déplacements des masses sont x_1 et x_2. Le mouvement des deux masses est décrit par le système d'équations linéaires suivant :

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = -\frac{k_1}{m_1}x_1 - \frac{k_2}{m_1}(x_1 - x_2)$$
$$\frac{d^2x_2}{dt^2} = -\frac{k_1}{m_2}x_2 - \frac{k_2}{m_2}(x_2 - x_1)$$

Dans le cas général, la résolution analytique de ce système est complexe. Envisageons le système simplifié dans lequel les masses et les raideurs des ressorts sont identiques et posons $\alpha = k/m$. On a donc :

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + \alpha(2x_1 - x_2) = 0$$
$$\frac{d^2x_2}{dt^2} + \alpha(2x_2 - x_1) = 0$$

Par analogie avec l'oscillateur harmonique, on suppose que les solutions sont de la forme :

$$x_1 = A_1e^{j\omega t} \quad \text{et} \quad x_2 = A_2e^{j\omega t}$$

L'introduction de ces solutions dans le système précédent donne :

$$\begin{pmatrix} -\omega^2 + 2\alpha & -\alpha \\ -\alpha & -\omega^2 + 2\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0$$

La solution est unique si le déterminant de la matrice est nul : $\omega^4 - 4\alpha\omega^2 + 3\alpha^2 = 0$. Cette équation admet les solutions : $\omega_1^2 = 3\alpha \quad \text{et} \quad \omega_2^2 = \alpha$

La première conduit à $\alpha(A_1 + A_2) = 0$ soit $A_1 = -A_2$ et la seconde à $A_1 = A_2$. Si le système oscille avec la pulsation ω_1, on a la solution <u>antisymétrique</u> : $x_1 = Ae^{j\omega t} \quad \text{et} \quad x_2 = -Ae^{j\omega t}$.

Pour la seconde fréquence, on obtient la solution <u>symétrique</u> : $x_1 = Ae^{j\omega t} \quad \text{et} \quad x_2 = Ae^{j\omega t}$

Le système ne pourra osciller avec une fréquence unique que pour des conditions initiales très particulières (les trouver). Dans le cas général, la solution est une combinaison linéaire de solutions harmoniques de pulsations ω_1 et ω_2 :

$$x_1(t) = + A\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$
$$x_2(t) = - A\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

BATTEMENTS :

Supposons que les deux oscillateurs soient faiblement couplés et que leurs fréquences propres soient voisines. Les conditions initiales sont choisies pour annuler φ_1 et φ_2.

En posant $\Delta\omega = ½|\omega_1 - \omega_2|$ et $<\omega> = ½(\omega_1 + \omega_2)$, il vient :

$$x_1(t) = 2A\cos(\Delta\omega t).\cos(<\omega> t)$$

L'amplitude des vibrations de chaque masse est modulée avec le temps à la fréquence $\Delta\omega$. La fréquence des vibrations est voisine de ω_1 et de ω_2. Ce phénomène est appelé « battement ».

L'intégration numérique des équations nous permet de déterminer la solution du problème dans le cas général.

Retour à l'applet