Понятие модели.

Место компьютерного моделирования в курсе информатики определяется несколькими факторами: во-первых, компьютерное моделирование является одним из важнейших компонентов новых информационных технологий. Учащиеся должны познакомиться с методами и современными средствами построения компьютерных моделей, научиться применять компьютерные модели для решения практических задач. Во-вторых, занимаясь компьютерным моделированием, учащиеся активно осваивают многие базовые понятия курса информатики, такие как: информация, формы представления и преобразования информации, величины, алгоритмы и т.д. В-третьих, компьютерное моделирование позволяет в доступных формах ввести важные общие понятия знакового моделирования. Это создает основу межпредметных связей курса информатики с другими школьными курсами, в первую очередь математики и физики. Сегодня, когда за счет микропроцессоров автоматическая обработка информации становится доступной для массового применения, перед школой открываются новые широкие возможности повышения эффективности обучения с помощью компьютерной техники. Одна из возможностей применения компьютеров в школе как раз и состоит в том, что учащиеся проводят с помощью ЭВМ так называемые *машинные эксперименты*. Особенностью изучения данной темы является перенос акцента со средства (компьютер и его программное обеспечение) на цель (решение конкретных задач), т.е. технологическая цепочка «объект – модель – алгоритм – программа – результат» изучается с акцентом на ведущем звене «объект – модель». Методической особенностью является широкое использование коллективных и самостоятельных форм работы учащихся.

Знакомство с основными понятиями компьютерного моделирования.

Каждый из нас хоть раз в жизни оказывался свидетелем различных природных явлений, поразивших совей масштабностью, огромной энергии, выделяющейся при их протекании. Картины таких явлений надолго остаются в памяти – мощные грозовые разряды, снежные лавины и волны цунами, смерчи и ураганы, землетрясения, падения метеоритов и др. Хотя эти явления относительно редки , влияние их на нашу жизнь очень велико, и поэтому понятно желание изучения этих явлений с целью предсказания как их появления, так и вызываемых ими последствий. Ввиду огромных масштабов таких явлений их далеко не всегда можно воспроизводить экспериментально.

Пусть нас интересует решение какой-либо задачи, возникающей в практической деятельности человека или при исследовании природных явлений. В этом случае обычно задается реальный объект: явление природы, физический, биологический, производственный или социальный процесс и т.. Решение таких практических задач начинается со сбора фактов данных научных наблюдений, затем строится некоторый образ объекта, т.е. выделяются его наиболее существенные черты и свойства и производится их описание с помощью, например, математических уравнений и формул. Данный образ достаточно легко исследуется в лабораторных условиях.

Для учащихся можно сформулировать определение:

Модель – такой материальный или мысленно представляемый объект, который в процессе познания, изучения замещает объект – оригинал, сохраняя некоторые типичные его черты, важные для данного исследования. Хорошо построенная модель, как правило, важнее для исследования, чем реальный объект. Некоторые объекты вообще не могут быть изучены непосредственно. Недопустимы, например, эксперименты с экономикой страны в познавательных целях. Принципиально неосуществимы эксперименты с прошлым, с планетами солнечной системы и т.д.

Другое назначение модели состоит в том, что с её помощью выявляются наиболее существенные факторы, формирующие те или иные свойства объекта, так как сама модель отражает лишь некоторые характеристики исходного объекта. Модель позволяет научиться правильно управлять объектом, проверяя различные варианты управления на модели этого объекта. Экспериментировать в этих целях с реальным объектом неудобно или нельзя. Если объект исследования обладает динамическими характеристиками, т.е. характеристиками, зависящими от времени, особое значение приобретает задача прогнозирования динамики состояния такого объекта под действием различных факторов. При ее решении использование моделей также может оказать неоценимую помощь.

Хорошо построенная модель обладает свойством: её изучение даёт новые знания об объекте–оригинале. Процесс построения модели – моделирование. Существует несколько приёмов моделирования, которые условно объединяются в 2 группы:

материальное (предметное) моделирование,

идеальное моделирование.

К 1 группе относятся такие способы моделирования, при которых исследование ведётся на основе модели, воспроизводящей основные геометрические, физические, динамические и функциональные характеристики изучаемого объекта. *Пример:* макеты зданий, модели летательных аппаратов, планетарий.

Идеальное моделирование основано не на материальной аналогии объекта и модели, а на аналогии идеальной, мыслимой. Она носит теоретический характер. Иногда оно может основываться на интуитивном представлении об объекте исследования, неподдающемся формализации или не нуждающегося в ней. *Пример*: жизненный опыт человека может считаться его моделью окружающего мира.

Идеальное моделирование может быть знаковым. В этом случае в качестве модели могут использоваться знаковые преобразования какого – либо вида, схемы, графики, чертежи, формулы и т.д. *Пример*: зЗнаковое моделирование – географическая карта, схемы, чертежи, формулы, наборы символов..

Важнейшим видом знакового моделирования является математическое моделирование. При этом построение модели формулируется на языке математики с использованием математических методов.

Классическим примером математического моделирования является описание исследования основных законов механики Ньютона средствами математики.

Но построить модель – ещё не всё. Модель описывает определённые законы, соотношения и характеристики. Конкретная же модель требует по известной величине получить какие-то новые значения или характеристики, которые согласовывались бы с математической моделью. Поэтому нужно описать последовательность операций, которые нужно проделать с моделью и которые привели бы к желаемому результату. С учащимися нужно рассматривать простейшие модели, которые используются в биологии, географии, физике, химии. Следует особо обратить внимание учащихся на компьютерное моделирование как одно из направлений математического моделирования. Компьютеры работают с информацией. А информация об объектах, событиях, процессах уже есть некоторая их модель. Как и любая математическая модель, компьютерная модель относится к знаковой модели. Нетрудно написать уравнение движения космического аппарата от Земли к Луне. Но нельзя получить их решение в виде простых формул. Для расчёта траектории нужен компьютер.

Моделирование играет огромную роль при подготовке принятия решения. В жизни практически никогда не бывает совершенно одинаковых ситуаций, поэтому принимать решение приходится в условиях неполной и недостаточной информации. В таких случаях недостаточную информацию пытаются получить, используя предположения, результаты научных исследований, полученных путем изучения соответствующих моделей. Для успешного управления системой необходимо предсказать ее поведение в будущем, а это можно сделать, исследуя интересующие нас свойства на моделях.

Рассмотрим еще одну классификацию моделей. Любая деятельность человека, создание любой системы направлены на достижение определенной цели. Цель является образом того, что мы хотим достичь, т.е. цель –

это модель будущего состояния системы (описательная модель). Описательная модель отвечает на вопрос : «Что мы хотим делать?». Наша деятельность, направленная на достижение этой цели, осуществляется по определенному плану, алгоритму. Этот алгоритм мы должны придумать заранее, т.е. мы должны составить модель наших действий (алгоритмическую модель). С помощью алгоритмической модели можно сравнить последствия всех наших возможных действий, не выполняя их реально, как говорят, «проиграть» их на модели. Алгоритмическая модель отвечает на вопрос «как мы будем делать?» Таким образом, моделирование является неотъемлимой частью любой целенаправленной деятельности, направленной на создание систем.

Один и тот же объект может быть описан различными моделями. Выбор модели зависит от того, какие мы ставим перед собой цели, для решения каких задач эта модель предназначена. Изменение цели непосредственно влечет за собой и изменение модели. Если мы хотим сделать обеденный стол, то в нашем воображении мы нарисуем этот стол. Но если мы передумаем и решим делать письменный стол, то в нашем воображении это будет совсем другой стол, и соответственно изменится алгоритм, по которому мы будем его делать. Модели получаются разные в зависимости от того, какие факторы считаются важными, а какие – второстепенными, какие упрощающие предположения были сделаны. Пусть мы хотим описать движение тела, брошенного под углом к горизонту. Можно сделать упрощающие предположения: тело является материальной точкой, сопротивление воздуха мало и им можно пренебречь, ускорение свободного падения постоянно и т.п. В этом случае мы получим уравнения, известные из курса физики. Если мы решим учитывать сопротивление воздуха или какие-либо другие факторы, влияющие на движение тела, то получим другие уравнения. От цели моделирования зависит, какие свойства объекта включать в модель, а какие нет. Пусть мы создаем модель некоего мужчины. Если мы хотим, чтобы наш знакомый нашел его среди других людей, то мы включим в описательную модель его примерный рост, цвет волос и еще какие-то отличительные черты его внешности. Если же модель предназначена для его лечащего врача, то описывать мы будем скорее всего не внешность, а состояние его здоровья.

Таким образом, цель моделирования определяет, какие стороны оригинала должны быть отражены в модели. Для различных целей требуются различные модели одного и того же объекта. Модели также можно условно разбить на две группы:

- модели, которые строятся для изучения какого-либо уже существующего процесса или явления (модель ядерной реакции или модель атомного ядра);
- моддели для создания будущих процессов или явлений (планы и программы действий, модель управления производством, модель строящегося дома).

Разделение моделей на эти группы условно, поскольку существует множество моделей, которые трудно отнести к одной из этих групп, например, произведения искусства или медицинские модели.

Можно подойти к делению на группы по другому принципу. Для некоторых целей нам могут понадобиться модели, которые не изменяются во времени. Например, фотография какого-либо объекта, чертеж детали и т.п. Такие модели называют статическими. Для других целей нам могут понадобиться модели, которые изменяются во времени, —- так называемые динамические модели. Это например, модель развития популяции живых организмов, модель ядерной реакции и другие.

При изучении понятия “моделирование”, “построение компьютерной модели” следует обратить внимание учащихся на основные **<u>этапы решения задач на ЭВМ</u>**:

1) постановка задачи (включает построение математической модели и выделение аргументов и результатов).

2.) построение алгоритма,

3) запись алгоритма на языке программирования,

4) . реализация алгоритма с помощью ЭВМ,

5) анализ полученных результатов.

Рассмотрим эти этапы на примере:

Решение задачи начинается с ее постановки, изложенной на языке строго определенных математических понятий. Поэтому, чтобы можно было решить задачу, связанную с исследованием реального объекта, необходимо сначала описать этот объект в математических терминах, т.е. построить математическую модель. Математическая модель объекта позволяет поставить задачу математически и тем самым свести решение реальной задачи к решению задачи математической. Математическая символика (а это не только формулы, графики, числа) является наиболее простым аппаратом для описания свойств окружающего мира, в первую очередь количественных. Математическое описание можно проверить на логическую непротиворечивость, оценить степень приближенности полученных результатов, подвергнуть обработке на ЭВМ и т.д. Степень соответствия модели реальному объекту проверяется практикой, экспериментом. Критерий практики дает возможность оценить модель и уточнить ее в случае необходимости. Метод математического моделирования реальных явлений возник и получил свое развитие физики (Галилей, Ньютон, Эйнштейн). Итак, построение модели приводит к математической постановке реальной задачи. Очень часто решение такой задачи не удается получить в явном виде, т.е. в виде формулы, связывающей исходные данные и р

езультаты. В таких случаях решение ищется в виде алгоритма, т.е. ко второму этапу решения задачи. Описанные этапы решения задачи выполняются человеком и носят творческий характер. Каждая новая задача требует новых способов решения, и этому вряд ли можно научить даже анализируя способы решения многих других уже известных задач. Однако уже этап моделирования включает помимо творческих и чисто технологические вопросы Используя определенную дисциплину при конструировании алгоритма, можно получить алгоритм с явно выраженной структурой, что облегчает его понимание и дальнейшую работу с ним. Единая технология, применяемая на этапах разработки алгоритма и программы, может значительно облегчить и ускорить общий процесс решения задач на ЭВМ. Анализ полученных результатов проводится с целью определения, насколько точно полученные результаты соответствуют реальности. Анализ результатов помогает уточнить модель, если это необходимо. Кроме того, при решении задачи могут быть получены результаты, которые противоречат смыслу решения задачи.

Пример. На научный семинар собрались ученые. Каждый из них оставил своим коллегам визитную карточку. Всего визитных карточек оказалось 132. Сколько всего ученых собралось на семинаре?

Предположим, что число всех ученых было X. Каждый из ученых оставил X-1 коллеге визитную карточку. Следовательно, всего визитных карточек было X(X-1)=132. Математической моделью этой задачи является квадратное уравнение X^2-X-132=0. Решив это квадратное уравнение, получим X1=12, x2=-11. Очевидно, что второй результат противоречит смыслу задачи.

“Транспортная задача”.

Два завода железобетонных изделий снабжаются цементом из двух складов. В сутки первому заводу необходимо 50 т. цемента, второму – 90 т. С первого склада можно вывозить 60 т., со второго – 80 т. Стоимость доставки в таблице.

	возможности склад 1 склад 2	
потребности	60 т.	80 т.
50 т. з- д 1	1.4 р	1.2 р
90 т. з-д 2	2 р	1.6 р

Как распределить поставки, чтобы общая сумма расходов на перевозку была минимальной?

Решение.

Построение математической модели. Какие факторы могут повлиять на организацию перевозок. Их много: болезни водителей, выход из строя транспорта, трудности с бензином и т.д. Их не учитываем. Нас интересует, как распределить цемент между заводами. Обозначим: x_1 – количество цемента, доставляемое в сутки с первого склада на первый завод, x_2 – с первого склада на второй завод, x_3 – со второго склада на первый завод, x_4 – со второго склада на второй завод.

	возможности склад 1 склад 2	
потребности	60 т.	80 т.
50 т. з- д 1	1.4 р x1	1.2 р x3
90 т. з-д 2	2 р x2	1.6 р x4

С первого склада нужно вывезти 60 т. Моделью этого свойства является уравнение $x_1+x_2=60$. Для второго склада – $x_3+x_4=80$. Так как поставки должны обеспечить безостановочную работу первого завода, то объём поступлений с обоих складов должен равняться объёму суточного потребления цемента, т. е. $x_1+x_3=50$, $x_2+x_4=90$.

Все сформулированные ограничения на объём перевозок должны выполнятся одновременно. Отсюда следует система уравнений:

$$\begin{aligned} &x_1+x_2=60 \\ &x_3+x_4=80 \qquad (1) \\ &x_1+x_3=50 \\ &x_2+x_4=90 \end{aligned}$$

Зная стоимость 1 тонны и объём перевозок, можно определить линейную функцию:

$$f=1,4*x_1+2*x_2+1.2*x_3+1.6*x_4$$

Также следует учитывать, что все x – положительные числа. Отсюда, построенная математическая модель выглядит так: найти, при каких

x_1, x_2, x_3, x_4 функция f принимает минимальное неотрицательное значение, если переменная $x_1>=0$; $x_2>=0$; $x_3>=0$; $x_4>=0$ и выполняется система уравнений (1).

<u>Исследование модели.</u>

Упростим систему ограничений, выразив x_2, x_3, x_4 через x_1.

$x_2=60-x_1$ Подставив в функцию f зависимости системы (2),

$x_3=50-x_1$ (2) получим более простой вид f.

$x_4=30+x_1$ $f=228-0,2x_1$

Отсюда следует эквивалентная математическая модель: Определить минимальное значение функции $f,=228- 0,2x_1$, если выполняется система (2) и условия $x_1>=0$; $x_2>=0$; $x_3>=0$; $x_4>=0$.

Так как должны выполнятся последние неравенства одновременно, то система неравенств примет вид:

$x_1>=0$

$60-x_1>=0$

$50-x_1>=0$

$30+x_1>=0$

Упрощая её, получаем : $0<=X_1<=50$

В результате получается эквивалентная математическая задача:

Определить минимальное положительное значение функции $f=228-0.2*x_1$, где $0=<x_1=<50$ и выполняется система (2).

Проведём математическое исследование полученной задачи. Легко увидеть, что если x_1 монотонно возрастает, то функция f монотонно убывает. Следовательно, значение f минимально при максимальном x_1 ($x_1=50$). Отсюда, зная x_1, находим x_2, x_3, x_4.

Построение алгоритма.

1. Найти максимальное x_1.
2. Вычислить x_2, x_3, x_4.
3. Вычислить f.

Т.к. в данной задаче ЭВМ не используется, то этапы решения задачи 3 и 4 пропускаются.

Анализ.

$x_1=50$, $x_2=10$, $x_3=0$, $x_4=80$ $f=218$

Это решение удовлетворяет последней математической модели, и мы получаем общее решение исходной задачи. Минимальные затраты на перевозку будут составлять 218 р., если из первого склада ежедневно вывозить на 1 завод 50 т, на второй 10 т, а из второго склада вывозить только на второй завод 80 т ежедневно.

В этом примере развитие модели происходит вследствие уточнения постановки задачи и сравнения полученных численных расчетов с практикой. В результате получилось одно решение.

Задача о полете рекеты.

Рассмотрим случай, когда получается бесконечное число решений.

В пространстве задана трёхмерная система координат $OX_1X_2X_3$.

Из точки А с координатами (3,-2,0) стартовала ракета со скоростью v (1, -5,1). В направленном движении значение скорости равно √27. Планета В имеет координаты (1803, -2,1500).

Нужно определить, в какой точке пространства и через какое время после старта ракета будет иметь наименьшее удаление от планеты В и чему равняется это расстояние.

Так как нет информации о расположении других планет, режимах работы ракетного двигателя, то будем считать, что другие планеты не оказывают влияния на движение и не расположены на траектории полёта, т. е. движение ракеты равномерно и прямолинейно. Тогда можно записать следующее уравнение:

$$\vec{x} = A + \vec{\vartheta}\, t \ (1)$$

Это уравнение прямой линии в пространстве, проходяшей через точку А в направлении вектора V. Обозначим координату точки X через (x_1,x_2,x_3). Кратчайшее расстояние от точки В до прямой (1) совпадает с наименьшим удалением ракеты в полете от планеты В и измеряется длиной перпендикуляра, опущенного из точки В на прямую (1). Обозначим через Хо основание перпендикуляра, опуўщнного из В на прямую. Так как точка Xo лежит на прямой, то существует такое значение параметра t=to, при котором выполняется равенство:

Xo=A+Vto

Величина to и есть то время, через которое после старта будет достигнуто минимальное удаление, т.е. ракета будет находиться в точке Xo. Перепишем уравнение (1) в координатном виде:

$$\begin{aligned} &x_1=3+1t; \\ &x_2=-2-5t; \qquad (2) \\ &x_3=t \end{aligned}$$

Тогда расстояние BX равняется длине вектора:

$$R=\left|\overrightarrow{BX}\right|=\sqrt{(1803-x_1)^2+(-2-x_2)^2+(1500-x_3)^2} \qquad (3)$$

Тогда математическая модель формулируется так: найти значение t, при котором длина вектора BX будет минимальной и выполняется система (2).. Следует отметить. что если длина вектора BX минимальна, то минимальным будет и значение квадрата длины вектора BX (таким образом избавляемся от корня).

$$R=(1800-t)^2+25t^2+(1500-t^2)$$

Подставим в это равенство значения из системы (2).

После раскрытия скобок будем иметь равенство::

$$R=27t^2-6600t+5\,490000$$

Получили новую математическую модель: исследовать квадратную функцию R - определить её минимум.

В школе учащиеся знают, что минимальное значение будет находиться в вершине параболы, так как 27 > 0. Иксовая координата вершины квадратичной параболы $y=ax^2+bx+c$ вычисляется по формуле: -b/2a. Следовательно функция R принимает минимальное значение при to=-b/2a, где б=-6600, a=27.

<u>Построение алгоритма.</u>

1. Получить t_0.

2. Подставить t_0 в выражение (3) и получить требуемое минимальное расстояние.

3. Подставить t_0 в систему (2) и получить координаты точки X_0

Вычислительный этап:

Получим to=6600/54=1100/9. Но число 1100/9 представляется бесконечной десятичной дробью, поэтому ограничимся двумя знаками после запятой to=122,22 с. Подставляя это значение в (3) получаем, что R□2255,36 метров. Из (2) получаем: приблизительные координаты точки x_0 имеют значение:

x_1=125,22. x_2=-613,1. x_3=122,22.

Таким образом, решение задачи: через время t_0=122,22 с. ракета будет находиться на минимальном удалении 2255,36 метров от планеты В в точке X_0 с координатами (125,22;-613,1;122,22).

В отличие от задачи с заводом в данной задаче получается приближённый ответ. В космосе уже большое значение играют не только сотые, но и тысячные (и т.д.) доли значения. Т.о. мы получили, что значение t_0 может принимать бесконечное множество значений, например 122; 122,2;122,22 и т.д. Поэтому в таких задачах принимают то решение, которое удовлетворяет заданной точности. Бесконечность множества решений не должна пугать, т.к. в жизни она встречается часто. Например, когда мы едем в автомобиле и хотим как можно ближе остановиться к киоску, то мы не измеряем расстояние в мм. или мкм. Поэтому допустимое приближение – в интервале плюс-минус 15 см. от киоска.

В этих задачах изучались модели процессов, описываемых числовой информацией.