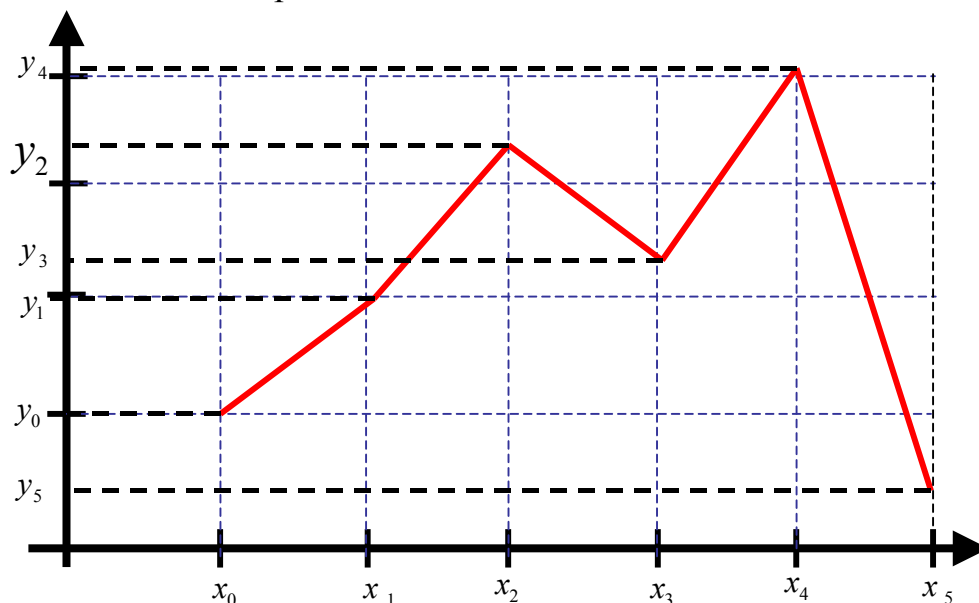


4.2: ЛОКАЛЬНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

При большом количестве узлов интерполяции сильно возрастает степень интерполяционных многочленов, что делает их неудобными для вычислений. Высокой степени многочлена можно избежать, разбив отрезок интерполяции на несколько частей с построением на каждой части самостоятельного интерполяционного многочлена.

1. Кусочно-линейная интерполяция

Простейшим, часто используемым видом локальной интерполяции, является кусочно-линейная интерполяция. Она состоит в том, что заданные точки $M_i(x_i; y_i)$ ($i = 0, 1, \dots, n$) соединяются прямолинейными отрезками, а функция $f(x)$ приближается к ломаной с вершинами в данных точках.



Для каждого из n интервалов $(x_i; x_{i+1})$, ($i = 0, 1, \dots, n-1$) в качестве уравнения интерполяционного многочлена используется уравнение прямой, проходящей через две точки $(x_i; y_i)$, $(x_{i+1}; y_{i+1})$:

$$\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{y - y_i}{y_{i+1} - y_i} \quad (1)$$

Следовательно, при использовании кусочно-линейной интерполяции сначала необходимо определить интервал, в который попадает значение аргумента x , затем подставить значение x в формулу (1) для найденного интервала и найти приближенное значение функции y . Можно показать, что интерполирование по формуле (1) тождественно интерполированию с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа первой степени ($n = 1$) для точек $(x_i; y_i)$, $(x_{i+1}; y_{i+1})$:

$$L_1(x) = y_i \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} + y_{i+1} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \quad (2)$$

Формулы (1) и (2) эквивалентны.

2. Кусочно-квадратичная интерполяция

В случае кусочно-квадратичной интерполяции в качестве интерполяционной функции на отрезке $(x_{i-1}; x_{i+1})$ принимается квадратичный трехчлен:

$$y = a_i x^2 + b_i x + c_i, \quad (3)$$

где $x_{i-1} < x < x_{i+1}$.

Для определения неизвестных коэффициентов a_i, b_i, c_i необходимы три уравнения. Ими служат условия прохождения параболы через три точки (x_{i-1}, y_{i-1}) , (x_i, y_i) , (x_{i+1}, y_{i+1}) . Эти условия можно записать в виде:

$$\begin{aligned} a_i x_{i-1}^2 + b_i x_{i-1} + c_i &= y_{i-1} \\ a_i x_i^2 + b_i x_i + c_i &= y_i \\ a_i x_{i+1}^2 + b_i x_{i+1} + c_i &= y_{i+1} \end{aligned} \quad (4)$$

Интерполяция для любой точки $x \in [x_0; x_n]$ проводится по трем ближайшим точкам. Решив систему (4) относительно a_i, b_i, c_i , и подставив найденные значения в уравнение (3), получим интерполяционный многочлен Лагранжа второй степени ($n = 2$) для трех соседних точек (x_{i-1}, y_{i-1}) , (x_i, y_i) , (x_{i+1}, y_{i+1}) :

$$L_2(x) = y_{i-1} \frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})}{(x_{i-1} - x_i)(x_{i-1} - x_{i+1})} + y_i \frac{(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})}{(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})} + y_{i+1} \frac{(x - x_{i-1})(x - x_i)}{(x_{i+1} - x_{i-1})(x_{i+1} - x_i)}$$

3. Кубическая сплайн-интерполяция

Интерполирование при разбиении отрезка интерполяции на несколько частей с построением на каждой части самостоятельного интерполяционного многочлена приобретает существенный недостаток: в точках стыка разных интерполяционных многочленов будет разрывной их первая производная.

В этом случае удобно пользоваться особым видом кусочно-полиномиальной интерполяции – интерполяции сплайнами (от английского слова Spline – рейка).

Сплайн – это функция, которая на каждом частичном отрезке интерполяции является алгебраическим многочленом, а на всем заданном отрезке непрерывна вместе с несколькими своими производными.

Рассмотрим способ построения сплайнов третьей степени (кубических сплайнов). Пусть интерполируемая функция $f(x)$ задана своими значениями y_i в узлах x_i ($i = 0, 1, \dots, n$). Длину частичного отрезка $[x_{i-1}; x_i]$ обозначим $h_i = x_i - x_{i-1}$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Будем искать кубический сплайн на каждом частичном отрезке $[x_{i-1}; x_i]$ в виде:

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3 \quad (5),$$

где a_i, b_i, c_i, d_i — четверка неизвестных коэффициентов. Всего их $4n$, т.к. n отрезков. Можно доказать, что задача на нахождение кубического сплайна имеет единственное решение.

Потребуем совпадения значений сплайна $S_i(x)$ в узлах с табличными значениями функции $f(x)$:

$$S_i(x_{i-1}) = y_{i-1} = a_i \quad (6)$$

$$S_i(x_i) = y_i = a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 \quad (7)$$

Число этих уравнений $(4n)$, вдвое меньше числа неизвестных коэффициентов. Чтобы получить дополнительные условия, потребуем непрерывности первой и второй производной $S'(x)$ и $S''(x)$ во всех точках, включая узлы. Для этого следует приравнять левые и правые производные $S'(x-0)$, $S'(x+0)$, $S''(x-0)$, $S''(x+0)$, во внутреннем узле x_i . Сначала получим $S'(x)$ и $S''(x)$, последовательно дифференцируя формулу (5):

$$S'_i(x) = b_i + 2c_i(x - x_{i-1}) + 3d_i(x - x_{i-1})^2$$

$$S''_i(x) = 2c_i + 6d_i(x - x_{i-1})$$

Для первой производной имеем:

$$S'_i(x_i - 0) = b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2$$

$$S'_i(x_i + 0) = b_{i+1}, i = 1, 2, \dots, n-1$$

Во втором случае прежде понадобилось в выражении $S'(x)$ заменить значение i на значение $i+1$.

Аналогично, для второй производной $S''_i(x) = 2c_i + 6d_i(x - x_{i-1})$ имеем:

$$S''_i(x_i - 0) = 2c_i + 6d_i h_i$$

$$S''_i(x_i + 0) = 2c_{i+1}, i = 1, 2, \dots, n-1$$

Приравнивая левые и правые производные, получим:

$$b_{i+1} = b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2 \quad (8)$$

$$c_{i+1} = c_i + 3d_i h_i, i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (9)$$

Уравнения (8) и (9) в совокупности дают еще $2(n-1)$ условий. В качестве недостающих двух условий берут требования к поведению сплайнов в граничных точках x_0 и x_n . Если потребовать нулевой кривизны сплайна на концах (т.е. равенство нулю второй производной), то получим:

$$\begin{aligned} c_1 &= 0 \\ c_n + 3d_n h_n &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

Перепишем все уравнения (6), (7), (8), (9), (10), исключив n неизвестных a_i :

$$\begin{aligned} b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 &= y_i - y_{i-1} & (i = \overline{1, n}) \\ b_{i+1} - b_i - 2c_i h_i - 3d_i h_i^2 &= 0 & (i = \overline{1, n-1}) \\ c_{i+1} - c_i - 3d_i h_i &= 0 & (i = \overline{1, n-1}) \\ c_1 &= 0 \\ c_n + 3d_n h_n &= 0 \end{aligned} \quad (11).$$

Система (11) состоит из $n + 2(n-1) + 2 = 3n$ уравнений. Решив ее, получим значения неизвестных b_i, c_i, d_i , определяющих совокупность всех формул для искомого интерполяционного сплайна.

$$S_i(x) = y_{i-1} + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Чтобы получить представление о характере и объеме вычислительной работы по нахождению всех коэффициентов сплайна, рассмотрим простой пример.

Пример. Интерполируемая функция задана таблицей, состоящей из четырех узлов ($n = 3$):

x	2	3	5	7
$f(x)$	4	-2	6	-3

Требуется найти значения коэффициентов $b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, d_3$, определяющих кубический сплайн на трех частичных отрезках:

$$S_1(x) = 4 + b_1(x - 2) + c_1(x - 2)^2 + d_1(x - 2)^3 \quad 2 \leq x \leq 3$$

$$S_2(x) = -2 + b_2(x - 3) + c_2(x - 3)^2 + d_2(x - 3)^3 \quad 3 \leq x \leq 5$$

$$S_3(x) = 6 + b_3(x - 5) + c_3(x - 5)^2 + d_3(x - 5)^3 \quad 5 \leq x \leq 7$$

Составим систему вида (11). Первая группа уравнений состоит из трех уравнений ($i = 1, 2, 3$):

$$b_1 + c_1 + d_1 = -6$$

$$2b_2 + 4c_2 + 8d_2 = 8$$

$$2b_3 + 4c_3 + 8d_3 = -9$$

Следующая пара уравнений дает еще четыре уравнения ($i = 1, 2$):

$$b_2 - b_1 - 2c_1 - 3d_1 = 0$$

$$b_3 - b_2 - 4c_2 - 12d_2 = 0$$

$$c_2 - c_1 - 3d_1 = 0$$

$$c_3 - c_2 - 6d_2 = 0$$

И наконец, два уравнения, задающих граничные условия для крайних сплайнов:

$$c_1 = 0$$

$$c_3 + 6d_3 = 0$$

Общая система состоит из 9 уравнений. Составим ее матрицу:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 8 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 8 & -9 \\ -1 & -2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 & -12 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

Система может быть решена на ЭВМ методом Гаусса. Полученные результаты округлены до двух знаков после запятой:

$$\begin{array}{lll} b_1 = -11,60 & c_1 = 5,60 & d_1 = 0 \\ b_2 = -0,40 & c_2 = 5,60 & d_2 = -1,70 \\ b_3 = 1,62 & c_3 = -4,59 & d_3 = 0,76 \end{array}$$

Полученные значения коэффициентов определяют искомый сплайн :

$$\begin{aligned} S_1(x) &= 4 - 11,6(x-2) + 5,60(x-2)^2 \\ S_2(x) &= -2 - 0,40(x-3) + 5,60(x-3)^2 - 1,70(x-3)^3 \\ S_3(x) &= 6 + 1,62(x-5) - 4,59(x-5)^2 + 0,76(x-5)^3 \end{aligned}$$

Убедимся, что найденный сплайн удовлетворяет заданным свойствам (значения сплайна и его первых производных в соответствующих узловых точках приведены в таблице):

x	2	3	5	7
$S_1(x)$	4	-2	6	-3
$S_1(x)$	4	-2	—	—
$S_2(x)$	—	-2	6	—
$S_3(x)$	—	—	6	-3,04
$S'_1(x)$	-11,6	-0,4	—	—
$S'_2(x)$	—	-0,4	1,60	—
$S'_3(x)$	—	—	1,62	-7,62

Прежде всего отметим практическое совпадение значений “соседних” выражений сплайна в узловых точках, а также совпадение этих значений с табличными значениями функции $f(x)$. Кроме того, практически совпадают значения производных $S'_1(x)$ и $S'_2(x)$ в узле $x=3$, так же как и производных $S'_2(x)$ и $S'_3(x)$ в узле $x=5$, что обеспечивает гладкость совокупного кубического сплайна.