

1. Решение алгебраических и трансцендентных уравнений.

1.1. Локализация и уточнение корней

Цель: формирование практических навыков нахождения корней алгебраических и трансцендентных уравнений графическим методом.

Краткие теоретические сведения

Пусть задано уравнение $f(x)=0$, где функция $f(x)$ определена и непрерывна на некотором конечном или бесконечном интервале $a < x < b$. Всякое значение ξ , которое обращает функцию $f(x)$ в нуль, т.е. $f(\xi)=0$, называют корнем уравнения $f(x)=0$ или нулем $f(x)$.

Будем считать, что уравнение $f(x)=0$ имеет лишь изолированные корни, т.е. для каждого корня уравнения существует малая окрестность, в которой не существует других корней уравнения.

Приближенное нахождение изолированных вещественных корней уравнения $f(x)=0$ обычно складывается из двух этапов:

- 1) **локализация** или **отделение** корней, т.е. установление наиболее тесных промежутков $[\alpha, \beta]$, в которых находится один и только один корень уравнения;
- 2) **уточнение** приближенных корней, иначе говоря, доведение их до заданной степени точности.

Отделение корней можно выполнить **графически**. Абсциссы точек пересечения графика функции $y=f(x)$ с осью абсцисс являются корнями уравнения $f(x)=0$.

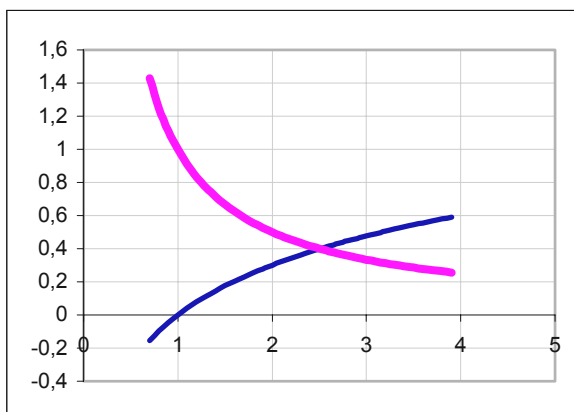
Построение графика даже с небольшой точностью дает представление, в каких интервалах находятся корни, и тем самым позволяет отделить их. Если построение такого графика вызывает трудности, то исходное уравнение нужно преобразовать к виду $\varphi(x)=\psi(x)$ таким образом, чтобы графики функций $y=\varphi(x)$ и $y=\psi(x)$ было проще построить. Абсциссы точек пересечения этих графиков и будут корнями рассматриваемого уравнения.

Пример. Отделить корень уравнения $x \lg x = 1$.

Решение. Перепишем исходное уравнение в виде $\lg x = \frac{1}{x}$.

Построив кривые $y = \lg x$ и $y = \frac{1}{x}$, получим, что корень исходного уравнения принадлежит отрезку $[2, 3]$

Чтобы отделить корни воспользуемся следующей теоремой математического анализа.



Теорема. Если непрерывная функция $f(x)$ принимает значения разных знаков на концах отрезка $[\alpha, \beta]$, тогда внутри этого отрезка находится, по крайней мере, один корень уравнения $f(x) = 0$. Иначе говоря, найдется хотя бы одно число $\xi \in [\alpha, \beta]$, такое, что $f(\xi) = 0$.

Корень ξ будет заведомо единственным, если производная в этой точке существует и сохраняет знак внутри отрезка $[\alpha, \beta]$, т.е. если $f'(x) > 0$ или $f'(x) < 0$ при $a < x < b$.

Согласно вышесказанному получаем следующий алгоритм отделения корней уравнения $f(x) = 0$:

- находим интервалы возрастания и убывания функции $f(x)$ (с помощью $f'(x)$);
- составляем таблицу знаков функции $f(x)$ в стационарных точках (в этих точках $f'(x) = 0$), а также в граничных точках области определения;
- определяем интервалы, на концах которых $f(x)$ имеет противоположные знаки; внутри таких интервалов находится один, и только один, корень.

Пример. Отделить и уточнить корни уравнения $x^3 + 3x^2 - 3 = 0$.

Решение. Находим $f'(x) = 3x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -2$. Составляем таблицу:

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$sign(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

Поскольку $f(-\infty) < 0$, $f(-2) > 0$, то первый корень уравнения находится в интервале $(-\infty, -2)$. Кроме того, $f(-3) < 0$, и поэтому приближенное значение одного из корней находится в интервале $(-3, -2)$. Другой корень находится в промежутке $(-2, 0)$, более того, в $(-2, -1)$, так как $f(-2) > 0$, $f(-1) < 0$. Третий корень находится в интервале $(0, +\infty)$, потому что $f(0) < 0$, а $f(+\infty) > 0$. Поскольку $f(1) = 1 > 0$, очевидно, что третий корень находится в интервале $(0, 1)$.

Контрольные вопросы

1. Какой корень называется изолированным?
2. Из чего складывается процесс нахождения изолированных вещественных корней уравнения $f(x) = 0$?
3. Какие существуют способы отделения корней?

Варианты заданий

I. Локализируйте и вычислите корни уравнений с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$:

1) $x_3 - 1.5x^2 + 0.58x - 0.057 = 0$

2) $x^4 - 4x_3 + 5.5x^2 - 3x + 0.5 = 0$

3) $x^5 - 5x^4 - 4x^3 + 20x^2 - 5x + 25 = 0$

4) $x^5 + 11x^4 + 10x^2 + 11x + 10 = 0$

5) $\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{\alpha x} + \frac{x}{\alpha^2 + x^2} = 0, \alpha = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

6) $x^3 - 2.5x^2 - x + 2 = 0$

7) $x^4 - 7.8x^3 - 2.45x^2 + 47.1x + 80.2 = 0$

8) $x^3 - 0.4x + 0.08 = 0$

9) $x^4 + 47.8x^3 + 797x^2 + 5349x - 123 = 0$

II. Графическим способом решите уравнения с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$:

1) $x^3 - 5x + 1 = 0$

9) $2x - \ln x - 4 = 0$

2) $5x^3 - 20x + 3 = 0$

10) $5x - 8 \ln x = 8$

3) $x^4 + x - 3 = 0$

11) $\sqrt{x+1} = \frac{1}{x}$

4) $x^5 - 5x + 2 = 0$

12) $x^7 + x + 4 = 0$

5) $x^4 + 2x - 4 = 0$

13) $x^2 + 4 \sin x - 3 = 0$

6) $2 \lg x - (x - 2)^2 = 0$

14) $x^3 - \cos 2x - 2 = 0$

7) $(x - 1)^2 - \sin 2x = 0$

15) $3x - \cos x - 1 = 0$

8) $x^2 - 10 \lg x - 3 = 0$

16) $5x - \cos x^2 + 2 = 0$