1. Решение алгебраических и трансцендентных уравнений.

1.2. Метод бисекции

***<u>Цель</u>*:** формирование практических навыков нахождения корней алгебраических и трансцендентных уравнений методом бисекции.

Краткие теоретические сведения

Одним из простейших методов уточнения корней алгебраических и трансцендентных уравнений является метод **бисекции** (**половинного деления**), который заключается в следующем.

В качестве начального (нулевого) приближения к корню берется середина отрезка $x_0 = (\alpha + \beta)/2$ (предполагается, что корень уже отделен и принадлежит отрезку $[\alpha, \beta]$). Вычисляется значение функции $f(x)$ в точке x_0. Из двух полученных отрезков выбирается тот, на концах которого функция имеет разные знаки.

В качестве первого приближения к корню принимается середина нового полученного отрезка и т.д. В результате на определенном шаге получается либо точный корень уравнения $f(x) = 0$, либо бесконечная последовательность вложенных друг в друга отрезков $[\alpha_1, \beta_1], [\alpha_2, \beta_2], \ldots, [\alpha_n, \beta_n]$, таких что $f(\alpha_n) \cdot f(\beta_n) < 0$, $n = 1,2,\ldots$ и $\beta_n - \alpha_n = \frac{1}{2^n}(\beta - \alpha)$.

Пусть необходимо найти корень с заданногй точностью ε. Тогда процесс деления отрезков пополам повторяется до тех пор, пока длина отрезка не станет меньше 2ε. Середина последнего отрезка дает значение корня с требуемой точностью.

Метод деления отрезка пополам связан с трудоемкими вычислениями. Однако он легко может быть реализован с помощью компьютера.

Алгоритм вычислений составляется так, чтобы находить значения функции *f(x)* на концах и в середине каждого из отрезков $[\alpha_n, \beta_n]$, $n = 1,2,\ldots$, и по условию $f(\alpha_n) \cdot f(\beta_n) < 0$ выбирать соответствующую его половину.

Контрольные вопросы

1) Какой корень называется изолированным?
2) Из чего складывается процесс нахождения изолированных вещественных корней уравнения $f(x) = 0$?
3) Какие существуют способы отделения корней?
4) Что понимают под итерацией?
5) В чем сущность метода деления отрезка пополам?

Варианты заданий

I. Локализуйте и вычислите корни уравнений с точностью $\varepsilon = 10^3$:

1) $x_3 - 1.5x^2 + 0.58x - 0.057 = 0$
2) $x^4 - 4x_3 + 5.5x^2 - 3x + 0.5 = 0$
3) $x^5 - 5x^4 - 4x^3 + 20x^2 - 5x + 25 = 0$
4) $x^5 + 11x^4 + 10x^2 + 11x + 10 = 0$
5) $\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{\alpha x} + \frac{x}{\alpha^2 + x^2} = 0, \alpha = 0,1,2,3,4,5$
6) $x^3 - 2.5x^2 - x + 2 = 0$
7) $x^4 - 7.8x^3 - 2.45x^2 + 47.1x + 80.2 = 0$
8) $x^3 - 0.4x + 0.08 = 0$
9) $x^4 + 47.8x^3 + 797x^2 + 5349x - 123 = 0$

II. Методом половинного деления решите следуюшие уравнения с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$:

1) $x^3 - 5x + 1 = 0$
2) $5x^3 - 20x + 3 = 0$
3) $x^4 + x - 3 = 0$
4) $x^5 - 5x + 2 = 0$
5) $x^4 + 2x - 4 = 0$
6) $2\lg x - (x-2)^2 = 0$
7) $(x-1)^2 - \sin 2x = 0$
8) $x^2 - 10\lg x - 3 = 0$
9) $2x - \ln x - 4 = 0$
10) $5x - 8\ln x = 8$
11) $\sqrt{x+1} = \frac{1}{x}$
12) $x^7 + x + 4 = 0$
13) $x^2 + 4\sin x - 3 = 0$
14) $x^3 - \cos 2x - 2 = 0$
15) $3x - \cos x - 1 = 0$
16) $5x - \cos x^2 + 2 = 0$

Порядок выполнения работы

Отделить корни заданных уравнений.

Вычислить с заданной точностью все корни приведенных уравнений методом деления отрезка пополам.

Оформить отчет.