

1. Решение алгебраических и трансцендентных уравнений.

1.3. Метод простой итерации»

Цель: формирование навыков нахождения корней алгебраических и трансцендентных уравнений методом простой итерации.

Краткие теоретические сведения

Одним из важнейших способов численного решения уравнений является **метод итерации**. Сущность этого метода заключается в следующем.

Пусть дано уравнение $f(x) = 0$, (1)

где $f(x)$ - непрерывная функция. Заменим уравнение (1) эквивалентным уравнением $x = \varphi(x)$. (2)

Выберем каким-либо способом грубое начальное приближение x_0 к корню и подставим его в правую часть уравнения (2). Тогда получим некоторое значение $x_1 = \varphi(x_0)$. (3)

На следующем шаге подставим в правую часть уравнения (3) вместо x_0 полученное в предыдущем шаге значение x_1 . Получим новое приближение $x_2 = \varphi(x_1)$.

Повторяя итерационный процесс, получаем последовательность приближений $\{x_n\}$, где $x_n = \varphi(x_{n-1})$, $n = 1, 2, \dots$ (4)

Если полученная последовательность $\{x_n\}$ сходится, т.е. существует $\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, то можно перейти к пределу в уравнении (4). Предполагая, что функция $\varphi(x)$ непрерывна, имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \varphi(\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n-1})$ или $\xi = \varphi(\xi)$. Тогда $\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ является корнем уравнения (2) и может быть вычислен с любой степенью точности.

Для практического применения метода простой итерации (4) нужно определить **достаточные условия сходимости** итерационного процесса.

Теорема. Пусть функция $\varphi(x)$ определена и дифференцируема на промежутке $[a, b]$, причем все ее значения принадлежат ему $\varphi \in [a, b]$. Если существует правильная дробь q такая, что $|\varphi'(x)| \leq q \leq 1$ (5) при $a < x < b$, то:

- 1) процесс итерации $x_n = \varphi(x_{n-1})$, $n = 1, 2, \dots$ сходится независимо от начального приближения $x_0 \in [a, b]$;
- 2) предельное значение $\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ является единственным корнем уравнения $x = \varphi(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Пример 1. Уравнение $f(x) = x^3 - x - 1 = 0$ имеет корень $\xi \in (1, 2)$, т.к. $f(1) = -1 < 0$ и $f(2) = 5 > 0$.

Исходное уравнение можно записать в виде $x = x^3 - 1$.

Определяем значения функции и производной $\varphi(x) = x^3 - 1$ и $\varphi'(x) = 3x^2$. В интервале $1 \leq x \leq 2$ производная $\varphi'(x) \geq 3$, следовательно условия сходимости процесса итерации не выполняются.

Перепишем исходное уравнение в другом виде $x = \sqrt[3]{x+1}$, (6)

В этом случае $\varphi(x) = \sqrt[3]{x+1}$ и $\varphi'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}$.

В интервале $1 \leq x \leq 2$ производная $0 < \varphi'(x) < \frac{1}{3\sqrt[3]{4}} < \frac{1}{4}$, значит процесс итерации для уравнения (6) сходится.

Известен один общий прием **приведения уравнения** (1) к виду (2), для которого выполняется условие сходимости (5).

Пусть искомый корень ξ лежит на отрезке $[a, b]$, причем

$$0 < m \leq f'(x) \leq M \quad (7)$$

при $a \leq x \leq b$. (Если производная $f'(x)$ отрицательная, то вместо уравнения $f(x) = 0$ рассматривается уравнение $-f(x) = 0$).

Уравнение (1) заменяется эквивалентным ему уравнением $x = x - \lambda f(x)$, $\lambda > 0$.

Можно положить, что $Y(x) = x - \lambda f(x)$. Подберем параметр λ таким образом, чтобы в отрезке $[a, b]$ существования корня выполнялось неравенство $0 \leq Y(x) = x - \lambda f(x) \leq q \leq 1$. (8)

Отсюда на основании (7) получим $0 \leq 1 - \lambda M \leq 1 - \lambda m \leq q$.

Таким образом, $\lambda = \frac{1}{M}$ и $q = 1 - \frac{m}{M} < 1$. Значит, неравенство (8) выполнено.

Пример 2. Привести данное уравнение $2x - \ln x - 4 = 0$ к виду, пригодному для применения метода простой итерации на отрезке $[2, 3]$.

Перепишем исходное уравнение в виде $x = x - \lambda(2x - \ln x - 4)$.

В данном примере $f(x) = 2x - \ln x - 4$. Вычислим $f'(x) = 2 - \frac{1}{x}$.

На отрезке $[2, 3]$ выполняется неравенство $0 < \frac{3}{2} \leq 2 - \frac{1}{x} \leq \frac{5}{3}$.

Выберем $\lambda = \frac{3}{5}$. Для нахождения корня уравнения, построим итерационный, сходящийся на промежутке $[2, 3]$, процесс следующего вида:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{3}{5}(2x_{n-1} - \ln x_{n-1} - 4).$$

В качестве начального приближения x_0 берется любая точка отрезка $[2,3]$. Процесс итерации продолжают до тех пор, пока модуль разности двух последовательных приближений x_{n-1} и x_n не станет меньше $|x_n - x_{n-1}| \leq \frac{1-q}{q}\varepsilon$, где ε – заданная предельная абсолютная погрешность корня ξ .

Контрольные вопросы

- 3) В чем заключается сущность метода простой итерации приближенного решения уравнений вида $f(x) = 0$?
- 4) Каковы достаточные условия сходимости метода простой итерации?
- 5) Какое условие является критерием достижения данной точности при решении уравнения $x = \varphi(x)$ методом простой итерации?

Варианты заданий

I. Методом простой итерации с точностью $\varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-4}$ решите уравнения:

- | | |
|--------------------------------------|-------------------------------------|
| 1) $x \lg x = -0.125$ | 9) $x^3 + 3x^2 + 1 = 0$ |
| 2) $x^3 - 3x + 3 = 0$ | 10) $x^3 - x - 1 = 0$ |
| 3) $2 - x = \ln x$ | 11) $x^3 + 3x - 1 = 0$ |
| 4) $x^3 + 4x - 3 = 0$ | 12) $2 \lg x - \frac{x}{2} + 1 = 0$ |
| 5) $x^3 - 5x^2 + 3x = 1$ | 13) $x^7 + 6x - 5 = 0$ |
| 6) $2 - xe^x = 0$ | 14) $2x - \ln x - 7 = 0$ |
| 7) $4 - x - \operatorname{tg} x = 0$ | 15) $x^5 + x - 3 = 0$ |
| 8) $x^7 + x + 4 = 0$ | 16) $2x^3 - 5x^2 + 7x - 1 = 0$ |

II. Методом простой итерации с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$ решите уравнения:

- | | |
|--|--|
| 1) $x^4 + 2.83x^3 - 4.5x^2 + 64x - 20 = 0$ | 2) $x^4 + x^3 - 6x^2 + 20x - 16 = 0$ |
| 3) $x^4 + 10x^3 - 1 = 0$ | 4) $x^3 + \cos x - 12x + 1 = 0$ |
| 5) $x^5 - x - 0.2 = 0$ | 6) $x^3 - 3x^2 - 14x - 8 = 0$ |
| 7) $x^4 - 4x^3 - 40x^2 - 56x - 20 = 0$ | 8) $x^3 - 4 \cos x = 0$ |
| 9) $x^2 + 4 \sin x - 1 = 0$ | 10) $ax^2 - \sin x - 3 = 0, a = 1(0.5)4$ |
| 11) $x^5 + ax - 1 = 0, a = 1(1)5$ | |

Порядок выполнения лабораторной работы

1. Отделить корни данных уравнений.
2. Для каждого из отделенных корней
3. а) привести уравнение $f(x) = 0$ к виду, пригодному для применения метода простой итерации, т.е. к виду $x = \varphi(x)$;
б) проверить выполнение условий сходимости метода простой итерации.
4. Подготовить, и выполнить на компьютере программу нахождения с определенной точностью всех корней данных уравнений методом простой итерации.