

1. Решение алгебраических и трансцендентных уравнений.

1.4. Метод Ньютона (касательных). Метод секущих

Цель: формирование навыков нахождения корней алгебраических и трансцендентных уравнений методами Ньютона и секущих.

Краткие теоретические сведения

Пусть ξ - точный корень уравнения $f(x) = 0$ (1) на отрезке $[a, b]$. Зададим начальное приближение к корню x_0 и рассмотрим разность $\varepsilon = \xi - x_0$.

Подставим $x_0 + \varepsilon$ в левую часть уравнения (1) $f(x_0 + \varepsilon) = 0$.

Разложим $f(x_0 + \varepsilon)$ в ряд Тейлора по степеням ε . Выделим в разложении линейную часть; остальные слагаемые войдут в остаток, которым можно пренебречь. Получим $f(x_0) + \varepsilon \cdot f'(x_0) = 0$.

Решив полученное уравнение относительно ε , найдем приближенное значение погрешности ε_0 . Прибавив ε_0 к x_0 получим уточненное значение корня $x_1 = x_0 + \varepsilon_0$

При этом можно ожидать, что x_1 будет ближе к точному корню ξ , чем x_0

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Аналогично можем уточнить и x_1 . В итоге получаем последовательность приближений к ξ , в которой каждое следующее приближение будет находиться из предыдущего по правилу, сформулированному Ньютоном:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

Чтобы такие последовательные приближения могли быть построены, должны выполняться следующие условия:

- 1) все x_n – принадлежат области определения функции f ;
- 2) $f'(x_n) \neq 0$, $n = 1, 2, \dots$

Теорема. Если $f(a) \cdot f(b) < 0$, причем $f'(x)$ и $f''(x)$ не равны нулю и сохраняют знаки при $a \leq x \leq b$, то при начальном приближении $x_0 \in [a, b]$, которое удовлетворяет неравенству $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$, методом Ньютона (2) можно вычислить единственный корень ε уравнения (1) с любой степенью точности.

При использовании метода Ньютона нужно руководствоваться следующим правилом: в качестве начального приближения x_0 выбирается

тот конец отрезка $[a, b]$, которому соответствует ордината того же знака, что и знак $f''(x)$.

Пример. Вычислить методом Ньютона на отрезке $[-11, -10]$ единственный корень уравнения $x^4 - 3x^2 + 75x - 10000 = 0$.

Решение. На отрезке существования корня можно взять в качестве начального приближения $x = -11$, при этом $f(-11) > 0$ и $f''(-11) > 0$. Последовательные приближения x_n ($n = 1, 2, \dots$) вычисляются по схеме:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^4 - 3x_n^2 + 75x_n - 10000}{4x_n^3 - 6x_n + 75}.$$

Рассмотренный алгоритм легко реализуется с помощью компьютера. На каждом шаге находятся три величины: x_n , $f(x_n)$ и $f'(x_n)$. Вычисления прекращаются при выполнении условия $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$, где ε - заданная точность.

Основной частью работы в методе Ньютона (2) является вычисление функции $f(x_n)$ и производной $f'(x_n)$, причем обязательным является условие $f'(x_n) \neq 0$.

Вычислительную работу можно уменьшить, заменив точное значение производной (касательной) $f'(x_n)$ приближенным (секущей)

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}.$$

Тогда итерационная формула (2) превратится в следующую формулу:

$$x_{n+1} = x_n - (x_n - x_{n-1}) \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \quad (3)$$

Полученный метод (3) называют **методом секущих** или **хорд**. Этот метод является двушаговым. Чтобы найти последующее значение x_{n+1} , нужно знать два предыдущих значения x_n и x_{n-1} . В частности, чтобы начать вычисления, необходимо знать два начальных значения x_0 и x_1 .

Контрольные вопросы

1. Каков геометрический смысл методов касательных и секущих?
2. Почему метод секущих называют двушаговым?

Варианты заданий.

Вычислите методом Ньютона и методом секущих корни уравнений с точностью $\varepsilon=10^{-5}$. Сравните полученные результаты.

$2x + \ln x = 0$	$x_0 = 0,1$	$x^3 + 3x - 1 = 0$	$x_0 = 0,3$
$x^2 - \lg(x + 2) = 0$	$x_0 = 0,5$	$x^2 + \ln x = 0$	$x_0 = 0,6$
$x^2 + \ln x - 4 = 0$	$x_0 = 1,5$	$(x - 1)^2 - 0,5 e^x = 0$	$x_0 = 0,2$
$(x - 1)^2 - e^{-x} = 0$	$x_0 = 1,4$	$x^3 - 2x^2 + 7x + 3 = 0$	$x_0 = 0$
$4x - \cos x = 0$	$x_0 = 0$	$x^2 - \cos \pi x = 0$	$x_0 = 0$
$2\sqrt{x} - \cos \frac{\pi}{2}x = 0$	$x_0 = 0,2$	$\sqrt{x} - 2 \cos \frac{\pi}{2}x = 0$	$x_0 = 0,7$
$x^2 - \cos^2 \pi x = 0$	$x_0 = 0,3$	$x^2 - \sin \pi x = 0$	$x_0 = 0,75$
$x - \cos x = 0$	$x_0 = 0,5$		

Порядок выполнения лабораторной работы

1. Найти с заданной точностью корень уравнения при помощи табличного процессора, применив метод Ньютона. Предусмотреть подсчёт итераций, затраченных на достижение заданной точности.
2. Найти корень уравнения с заданной точностью при помощи табличного процессора, используя метод секущих. Предусмотреть подсчёт итераций, затраченных на достижение данной точности.
3. Сравнить полученные результаты.
4. Оформить отчет.