2. Решение систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

2.1. Метод Гаусса

Цель: формирование практических навыков нахождения корней система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) методом Гаусса (схема единственного деления).

Краткие теоретические сведения

Наиболее распространенным методом решения СЛАУ является **метод Гаусса**, основной идеей которого является **последовательное исключение переменных**. Существуют различные вычислительные схемы реализации этого метода. Рассмотрим одну из них – **схему единственного деления**.

Пусть задана система линейных алгебраических уравнений следующего вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = a_{1n+1} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = a_{2n+1} \\ \qquad ... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ...a_{nn}x_n = a_{nn+1} \end{cases} \tag{1}$$

Требуется найти неизвестные величины $x_1, x_2, ..., x_n$.

Пусть $a_{11} \neq 0$. Разделим первое уравнение системы (1) на a_{11}. Тогда систему (1) можно переписать следующим образом:

$$\begin{cases} x_1 + b_{12}x_2 + ... + b_{1n}x_n = b_{1n+1} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = a_{2n+1} \\ \qquad ... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ...a_{nn}x_n = a_{nn+1} \end{cases} \tag{2}$$

Отсюда видно, что с помощью первого уравнения можно из всех остальных уравнений исключить x_1. Для этого умножим первое уравнение системы (2) последовательно на $-a_{21}, -a_{31}, ..., -a_{n1}$; то же самое проделаем со вторым, третьим и так далее уравнениями системы (2). В результате получаем эквивалентную систему, имеющую вид:

$$\begin{cases} x_1 + b_{12}x_2 + ... + b_{1n}x_n = b_{1n+1} \\ a_{22}^{(1)}x_2 + ... + a_{2n}^{(1)}x_n = a_{2n+1}^{(1)} \\ \qquad ... \\ a_{n2}^{(1)}x_2 + ...a_{nn}^{(1)}x_n = a_{nn+1}^{(1)} \end{cases} \tag{3}$$

Допустим, что все n шагов преобразований Гаусса возможны. Тогда система (1) сводится к треугольному виду:

$$\begin{cases} x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 ... + b_{1n}x_n = b_{1n+1} \\ \qquad x_2 + b_{23}x_3 + ... + b_{2n}x_n = b_{2n+1} \\ \qquad\qquad ... \\ \qquad a_{n2}^{(1)}x_2 + ... a_{nn}^{(1)}x_n = a_{nn+1}^{(1)} \end{cases} \tag{4}$$

Процесс сведения системы (1) к виду (4) называют ***прямым ходом*** метода Гаусса.. Нахождение неизвестных величин $x_n, x_{n-1}, ..., x_1$ из системы (4) называют ***обратным ходом*** метода Гаусса.

При расчетах могут допускаться быть ошибки, поэтому необходимо проводить контроль выполненных действий (особенно при ручных вычислениях). Одна из наиболее простых схем контроля основана на том, что увеличение значений всех неизвестных на единицу эквивалентно замене данной системы (1) контрольной системой, в которой свободные члены равны суммам всех коэффициентов соответствующей строки, т.е.

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + ... + a_{1n}y_n = a_{1n+1} + \sum\limits_{k=1}^{n} a_{1k} \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{2n}y_n = a_{2n+1} + \sum\limits_{k=1}^{n} a_{2k} \\ \qquad ... \\ a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + ... a_{nn}y_n = a_{nn+1} + \sum\limits_{k=1}^{n} a_{nk} \end{cases} \tag{5}$$

где $y_i = x_i + 1, \ i = \overline{1, n}$.

Если вместе с заданной системой решать контрольную систему уравнений (5), то получим возможность контролировать каждый шаг вычислений, как будет показано ниже.

Если вычисления по схеме единственного деления проводятся с помощью калькулятора, много времени уходит на запись промежуточных результатов. Компактная схема Гаусса предоставляет экономный способ записи. Все результаты будем записывать в одну таблицу:

	i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	a_{i5}	$\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} = a_{i6}$
I	**1**	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}
	2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	a_{26}
	3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}	a_{36}
	4	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}	a_{46}
		1	b_{12}	b_{13}	b_{14}	b_{15}	$a_{16} / a_{11} = b_{16}$

II	**2**		$a_{22}^{(1)}$	$a_{23}^{(1)}$	$a_{24}^{(1)}$	$a_{25}^{(1)}$	$a_{26}^{(1)}$
	3		$a_{32}^{(1)}$	$a_{33}^{(1)}$	$a_{34}^{(1)}$	$a_{35}^{(1)}$	$a_{36}^{(1)}$
	4		$a_{42}^{(1)}$	$a_{43}^{(1)}$	$a_{44}^{(1)}$	$a_{45}^{(1)}$	$a_{46}^{(1)}$
			1	$b_{23}^{(1)}$	$b_{24}^{(1)}$	$b_{25}^{(1)}$	$a_{26}^{(1)} / a_{22}^{(1)} = b_{26}^{(1)}$
III	**3**			$a_{33}^{(2)}$	$a_{34}^{(2)}$	$a_{35}^{(2)}$	$a_{36}^{(2)}$
	4			$a_{43}^{(2)}$	$a_{44}^{(2)}$	$a_{45}^{(2)}$	$a_{46}^{(2)}$
				1	$b_{34}^{(2)}$	$b_{35}^{(2)}$	$a_{36}^{(2)} / a_{33}^{(2)} = b_{36}^{(2)}$
IV	**4**				$a_{44}^{(3)}$	$a_{45}^{(3)}$	$a_{46}^{(3)}$
					1	$b_{45}^{(3)}$	$a_{36}^{(3)} / a_{44}^{(3)} = b_{36}^{(3)}$
V					1	x_4	y_4
				1		x_3	y_3
			1			x_2	y_2
		1				x_1	y_1

Порядок заполнения таблицы

<u>Прямой ход</u>

1. Записываем коэффициенты данной системы в четырех строках и пяти столбцах раздела I.

2. Суммируем все коэффициенты по строке и записываем сумму в столбце Σ (столбец контроля), например: $a_{16} = \sum_{j=1}^{5} a_{1j}$.

3. Делим все числа первой строки на a_{11}и результат $b_{1j} = a_{1j} / a_{11}$ записываем в пятом столбце раздела I.

4. Находим $\sum_{j=1}^{5} b_{1j}$ и проверяем: если вычисления ведутся с постоянным количеством знаков после запятой, то числа b_{16} и $\sum_{j=1}^{5} b_{1j}$ не должны отличаться больше, чем единицу последнего разряда, в противном случае нужно проверить действия в пункте 3.

5. Находим коэффициенты a_{ij} по формулам

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{i1} b_{1j}, \qquad i = 2,3,4; \qquad j = 2,3,4,5.$$

Результаты записываем в первых строках раздела II.

6. Делаем проверку. Сумма элементов каждой строки $\sum_{j=2}^{5} a_{ij}^{(1)}$, $i = 2,3,4;$ не должна отличаться от $a_{16}^{(1)}$ больше, чем на единицу последнего разряда (если вычисления ведутся с постоянным количеством знаков после запятой).

7. Делим все элементы первой строки раздела II на $a_{22}^{(1)}$ и результаты записываем в последней строке раздела II.

8. Делаем проверку, как описано в пункте 4.

9. Находим $a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - a_{i2}^{(1)} b_{2j}^{(1)}$, $i = 3,4;$ $j = 3,4,5.$

Результаты записываем в первые строки раздела III.

10. Делаем проверку, как показано в пункте 6.

11. Делим элементы первой строки раздела III на $a_{33}^{(2)}$ и находим числа $b_{3j}^{(2)} = \dfrac{a_{3j}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}}$. Все результаты записываем в третьей строке раздела III.

12. Делаем проверку.

13. Находим $a_{4j}^{(3)} = a_{4j}^{(2)} - a_{43}^{(2)} b_{3j}^{(2)}$, $j = 4,5.$ Результаты записываем в разделе IV.

<u>Обратный ход</u>

1. Записываем единицы в разделе V, как это показано в таблице.

2. Вычисляем $x_4 = \dfrac{a_{45}^{(3)}}{a_{44}^{(3)}}$.

3. Для вычисления значений x_3, x_2, x_1, используем только строки разделов I, II, III, содержащие единицы, начиная с последней строки. Так, чтобы вычислить x_3, умножим x_4 на $b_{34}^{(2)}$ и результат вычтем из $b_{35}^{(2)}$. При этом единицы из раздела V, помогают найти для x_3, x_2, x_1 соответствующие коэффициенты в выделенных строках. Таким образом, $x_3 = b_{35}^{(2)} - b_{35}^{(2)} x_4$.

4. Находим x_2, для чего используем элементы нужной строки раздела II:

$$x_2 = b_{25}^{(1)} - b_{24}^{(1)} x_4 - b_{23}^{(1)} x_3 .$$

5. Находим x_1, используя элементы выделенной строки раздела I: $x_1 = b_{15} - b_{14} x_4 - b_{13} x_3 - b_{12x} x_2 .$

Аналогично выполняется обратный ход в контрольной системе. Решения этой системы должны отличаться от решений приведенной системы на единицу (с точностью до единицы последнего разряда): $\overline{x}_i = x_i + 1$, $i = 1,2,3,4$.

Контроль осуществляется с помощью столбца Σ.

Подобным образом реализуется компактная схема Гаусса для систем с другим количеством неизвестных.

Метод Гаусса относят к точным методам. При этом конкретное решение, полученное в результате реализации схемы Гаусса, будет приближенным вследствие погрешностей, возникающих при вычислениях и округлении. Тем не менее, полученное решение можно уточнить до заданной степени точности.

Пусть $\overline{x_0}$ - приближенное решение системы (1), полученное методом Гаусса. Вектор $\overline{x} = \overline{x_0} + \overline{\varepsilon}$ является точным решением (1), $\overline{\varepsilon}$ - неизвестный вектор поправки, найти который можно, разрешив матричное уравнение $A(\overline{x_0} + \overline{\varepsilon}) = \overline{b}$ относительно $\overline{\varepsilon}$. Для нахождения неизвестного вектора $\overline{\varepsilon}$ решим с помощью метода Гаусса следующее матричное уравнение: $A\overline{\varepsilon} = \overline{b} - A\overline{x_0}$. Заметим, что для нахождения неизвестных величин $x_1, x_2, ..., x_n$, $y_1, y_2, ..., y_n$ и вектора поправки $\overline{\varepsilon}$, достаточно один раз совершить прямой ход метода Гаусса.

Контрольные вопросы

1. К кому виду методов – точных или приближенных – относится метод Гаусса?
2. В чем заключается прямой и обратный ход в схеме единственного деления?
3. Как осуществляют контроль ручных вычислений в прямом и обратном ходе метода Гаусса?
4. Как можно уточнить решение, полученное по методу Гаусса?

Варианты заданий

Решить данные системы линейных алгебраических уравнений с текущим контролем вычислений; уточнить полученное решение с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$:

1. 1 $\begin{cases} 73x_1 + 42x_2 - 54x_3 + 66x_4 = 3 \\ 42x_1 - 63x_2 + 22x_3 + 24x_4 = 15 \\ 54x_1 - 22x_2 + 52x_3 + 31x_4 = 72 \\ 66x_1 + 24x_2 + 31x_3 + 41x_4 = -9 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 13.14x_1 + 2.42x_2 - 1.17x_3 = 1.26 \\ -2.12x_1 + 6.3x_2 - 2.45x_3 = 2.63 \\ 6.17x_1 - 0.65x_2 + 4.6x_3 = 3.14 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2.1x_1 + 2.31x_2 + 3.5x_3 = 30.2 \\ -1.3x_1 + 3.1x_2 + 1.52x_3 = 40.9 \\ 3.8x_1 + 1.52x_2 + 1.8x_3 = 42.8 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 4.31x_1 + 0.26x_2 + 0.61x_3 + 0.27x_4 = 1.72 \\ 6.26x_1 + 2.32x_2 + 2.18x_3 + 0.34x_4 = 1.00 \\ 0.61x_1 + 1.78x_2 + 3.20x_3 + 0.31x_4 = 1.34 \\ 5.29x_1 + 0.34x_2 + 0.31x_3 + 5.17x_4 = 1.27 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2.0x_1 - 0.45x_2 + 3.6x_3 = -3 \\ -2.4x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 1 \\ 1.8x_1 - 2x_2 + 8.4x_3 = 0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 5.1x_1 + 3.5x_2 + 1.9x_3 = 1.8 \\ 1.5x_1 + 8.5x_2 + 8.4x_3 = 6.2 \\ 1.0x_1 + 6.5x_2 + 10x_3 = 1.2 \end{cases}$

5.
$\begin{cases} -4.12x_1 + 2.42x_2 + 1.54x_3 + 0.88x_4 = 11.17 \\ 0.42x_1 + 3.95x_2 + 1.87x_3 + 2.44x_4 = 0.115 \\ 1.34x_1 + 0.87x_2 + 3.20x_3 + 0.31x_4 = 9.909 \\ 0.88x_1 + 0.43x_2 + 1.31x_3 + 5.17x_4 = 9.349 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3.65x_1 - 2.27x_2 + 0.18x_3 = -3.8 \\ -2.27x_1 + 5.37x_2 - 0.46x_3 = 0.93 \\ 2.18x_1 - 0.46x_2 + 2.16x_3 = 1.33 \end{cases}$

7.
$\begin{cases} 3.2x_1 + 0.42x_2 + 1.24x_3 + 0.8x_4 = 1.7 \\ 4.2x_1 + 4.0x_2 + 1.87x_3 + 0.3x_4 = 0.1 \\ 12.4x_1 + 1.7x_2 + 4.3x_3 + 0.5x_4 = 7.0 \\ -1.8x_1 + 0.43x_2 + 0.35x_3 + 6.2x_4 = 8.3 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 7.6x_1 + 0.5x_2 - 2.3x_3 = 1.9 \\ 1.5x_1 + 9.1x_2 + 0.27x_3 = 9.7 \\ -1.3x_1 + 0.24x_2 + 5.8x_3 = -1.4 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 1.8x_1 + 2x_2 + 4.8x_3 = 12 \\ 2x_1 + 4.7x_2 + 3x_3 = 13 \\ x_1 + 1.3x_2 + 10x_3 = 14 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 3.1x_1 + 1.5x_2 + 4.0x_3 = 10.8 \\ 5.5x_1 + 2.5x_2 + 0.5x_3 = 9.2 \\ 1.0x_1 + 9.5x_2 + 10x_3 = 17.2 \end{cases}$

13.
$\begin{cases} 8.7x_1 - 2.2x_2 - 1.1x_3 - 0.7x_4 = 1.1 \\ -2.2x_1 + 10x_2 + 2.3x_3 - 0.7x_4 = -3.3 \\ -1.1x_1 + 2.3x_2 - 5.1x_3 + 2.8x_4 = 8.5 \\ -.7x_1 - 0.7x_2 + 2.8x_3 + 7.9x_4 = -1.7 \end{cases}$

14. $\begin{cases} 2.23x_1 - 0.71x_2 + 0.65x_3 = 1.25 \\ -0.71x_1 - 5.37x_2 - 1.46x_3 = 0.93 \\ 0.65x_1 - 1.46x_2 + 2.16x_3 = -0.87 \end{cases}$

15. $\begin{cases} 5.8x_1 - 1.3x_2 - 0.2x_3 = 3.1 \\ 0.3x_1 + 4.0x_2 + 0.7x_3 = -1.7 \\ 1.2x_1 - 0.7x_2 - 6.7x_3 = 1.1 \end{cases}$

16. $\begin{cases} 5.2x_1 + 1.14x_2 + 0.30x_3 + 0.40x_4 = 1.0 \\ 0.14x_1 + 7.3x_2 + 0.2x_3 + 0.24x_4 = 1.00 \\ 2.30x_1 + 0.22x_2 - 9.2x_3 + 0.3x_4 = 1.3 \\ 1.4x_1 + 2.24x_2 + 0.31x_3 - 4.1x_4 = 1.2 \end{cases}$

Порядок выполнения лабораторной работы

1. Решить заданную СЛАУ методом Гаусса с помощью табличного процессора (реализовать алгоритмы схемы единственного деления и контроля вычислений).

2. Уточнить полученное решение по описанному алгоритму.

3. Оформить отчёт.