2. Решение систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

2.2. СЛАУ с симметричной матрицей. Метод квадратного корня

<u>Цель:</u> формирование практических навыков нахождения корней СЛАУ

Краткие теоретические сведения

Метод квадратного корня используется для решения линейных систем следующего вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad ... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ...a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $A = \{a_{ij}\}, \quad i, j = \overline{1, n};$ - симметричная матрица, т.е. $a_{ij} = a_{ji}$.

Метод квадратного корня относят к **точным** методам, поскольку при предположении, что вычисления проводятся точно (без округления), он позволяет получить точные значения неизвестных. На практике же все вычисления ведутся с округлениями, поэтому значения неизвестных неизбежно будут иметь погрешности.

Решение системы (1) проводится в два этапа.

Прямой ход. Поскольку A - симметричная матрица, то ее можно представить в виде произведения двух взаимно транспонированных между собой треугольных матриц

$$A = T' \cdot T, \tag{2}$$

где

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix}, \qquad T' = \begin{pmatrix} t_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ t_{12} & t_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_{1n} & t_{2n} & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix}.$$

Перемножим матрицы T и T', полученную матрицу приравняем к матрице A. Получим следующие формулы для нахождения неизвестных t_{ij}:

$$\begin{cases} t_{11} = \sqrt{a_{11}}, \qquad t_{1j} = \dfrac{a_{1j}}{t_{11}}, \quad j > i \\ t_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum\limits_{k=1}^{i-1} t_{ki}^2}, \qquad 1 < i \le n \\ t_{ij} = \dfrac{a_{ij} - \sum\limits_{k=1}^{i-1} t_{ki} \cdot t_{kj}}{t_{ii}}, \qquad i < j \\ t_{ij} = 0, \qquad i > j \end{cases}$$

Так как матрица A представима в виде (2), то систему (1) можно эквивалентным образом заменить двумя системами уравнений вида:

$$T' \cdot \overline{y} = \overline{b}, \qquad T \cdot \overline{x} = \overline{y} \tag{3}$$

Обратный ход. Запишем в развернутом виде системы (3):

$$\begin{cases} t_{11} \cdot y_1 = b_1 \\ t_{12} \cdot y_1 + t_{22} \cdot y_2 = b_2 \\ \cdots \\ t_{1n} \cdot y_1 + t_{2n} \cdot y_2 + \cdots + t_{nn} \cdot y_n = b_n \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} t_{11} \cdot x_1 + t_{12} \cdot x_2 + \cdots + t_{1n} \cdot x_n = y_1 \\ \qquad t_{22} \cdot x_2 + \cdots + t_{2n} \cdot x_n = y_2 \\ \qquad\qquad \cdots \\ \qquad\qquad t_{nn} \cdot x_n = y_n \end{cases}$$

Отсюда последовательно находим:

$$y_1 = \frac{b_1}{t_{11}}, \qquad y_i = \frac{b_i - \sum_{k=1}^{i-1} t_{ki} \cdot x_k}{t_{ii}}, \quad i > 1 \tag{4}$$

$$x_n = \frac{y_n}{t_{nn}}, \qquad x_i = \frac{y_i - \sum_{k=i+1}^{n} t_{ik} \cdot x_k}{t_{ii}}, \quad i < n \tag{5}$$

Метод квадратного корня более удобен и экономичен по сравнению с методом Гаусса. Он легко программируется. Алгоритм этого метода основан на формулах (3), (4), (5).

Контрольные вопросы

1) Для решения каких СЛАУ используется метод квадратного корня?
2) В чем сущность метода квадратного корня?

Варианты заданий

Решите следующие СЛАУ методом квадратного корня:

1. $\begin{cases} 13.14x_1 - 2.12x_2 + 1.17x_3 = 1.27 \\ -2.12x_1 + 6.3x_2 - 2.45x_3 = 2.13 \\ 1.17x_1 - 2.45x_2 + 4.6x_3 = 3.14 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 7.31x_1 + 0.42x_2 + 0.54x_3 + 0.66x_4 = 0.3 \\ 0.42x_1 - 6.30x_2 + 0.22x_3 + 0.24x_4 = 0.5 \\ 0.54x_1 + 0.22x_2 + 5.20x_3 + 0.31x_4 = 0.7 \\ 0.66x_1 + 0.24x_2 + 0.31x_3 + 4.17x_4 = 0.9 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2.0x_1 - 0.45x_2 + 1.6x_3 = -3 \\ -0.45x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 1 \\ 1.6x_1 - 2x_2 + 10x_3 = 0 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 24.21x_1 + 2.31x_2 + 3.58x_3 = 30.24 \\ 2.31x_1 + 31.49x_2 + 1.52x_3 = 40.95 \\ 3.58x_1 + 1.52x_2 + 28.72x_3 = 42.81 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 4.31x_1 + 0.26x_2 + 0.61x_3 + 0.27x_4 = 1.02 \\ 0.26x_1 + 2.32x_2 + 0.18x_3 + 0.34x_4 = 1.00 \\ 0.61x_1 + 0.18x_2 + 3.20x_3 + 0.31x_4 = 1.34 \\ 0.27x_1 + 0.34x_2 + 0.31x_3 + 5.17x_4 = 1.27 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + x_3 = 12 \\ 2x_1 + 10x_2 + 3x_3 = 13 \\ x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 14 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 5.1x_1 + 1.5x_2 + 1.0x_3 = 10.83 \\ 1.5x_1 + 8.5x_2 + 0.5x_3 = 9.20 \\ 1.0x_1 + 0.5x_2 + 10x_3 = 17.20 \end{cases}$

5. $\begin{cases} -4.12x_1 + 0.42x_2 + 1.34x_3 + 0.88x_4 = 11.17 \\ 0.42x_1 + 3.95x_2 + 1.87x_3 + 0.43x_4 = 0.115 \\ 1.34x_1 + 0.87x_2 + 3.20x_3 + 0.31x_4 = 9.909 \\ 0.88x_1 + 0.43x_2 + 0.31x_3 + 5.17x_4 = 9.349 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3.65x_1 - 2.27x_2 + 0.18x_3 = 2.25 \\ -2.27x_1 + 5.37x_2 - 0.46x_3 = 0.93 \\ 0.18x_1 - 0.46x_2 + 2.16x_3 = 1.33 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 3.23x_1 + 0.42x_2 + 1.24x_3 + 0.88x_4 = 1.17 \\ 0.42x_1 + 4.06x_2 + 1.87x_3 + 0.43x_4 = 0.11 \\ 1.24x_1 + 0.87x_2 + 4.30x_3 + 0.35x_4 = 7.90 \\ 0.88x_1 + 0.43x_2 + 0.35x_3 + 6.28x_4 = 8.34 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 7.6x_1 + 0.5x_2 - 1.3x_3 = 1.9 \\ 0.5x_1 + 9.1x_2 + 0.2x_3 = 9.7 \\ -1.3x_1 + 0.2x_2 + 5.8x_3 = -1.4 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 3.1x_1 + 1.5x_2 + 1.0x_3 = 10.83 \\ 1.5x_1 + 2.5x_2 + 0.5x_3 = 9.20 \\ 1.0x_1 + 0.5x_2 + 10x_3 = 17.20 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 8.7x_1 - 2.2x_2 - 1.1x_3 - 0.7x_4 = 1.1 \\ -2.2x_1 + 10x_2 + 2.3x_3 - 0.7x_4 = -3.3 \\ -1.1x_1 + 2.3x_2 - 5.1x_3 + 2.8x_4 = 8.5 \\ -0.7x_1 - 0.7x_2 + 2.8x_3 + 7.9x_4 = -1.7 \end{cases}$

14. $\begin{cases} 2.23x_1 - 0.71x_2 + 0.65x_3 = 1.25 \\ -0.71x_1 - 5.37x_2 - 1.46x_3 = 0.93 \\ 0.65x_1 - 1.46x_2 + 2.16x_3 = -0.87 \end{cases}$

15. $\begin{cases} 5.23x_1 + 0.14x_2 + 0.30x_3 + 0.40x_4 = 1.02 \\ 0.14x_1 + 7.32x_2 + 0.22x_3 + 0.24x_4 = 1.00 \\ 0.30x_1 + 0.22x_2 - 9.20x_3 + 0.31x_4 = 1.34 \\ 0.40x_1 + 0.24x_2 + 0.31x_3 - 4.17x_4 = 1.27 \end{cases}$

16. $\begin{cases} 5.8x_1 + 0.3x_2 - 0.2x_3 = 3.1 \\ 0.3x_1 + 4.0x_2 - 0.7x_3 = -1.7 \\ -0.2x_1 - 0.7x_2 - 6.7x_3 = 1.1 \end{cases}$

Порядок выполнения лабораторной работы

1. Решить заданную СЛАУ методом квадратного корня
2. Оформить отчёт.