2. Приближённые методы решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

2.3. Метод простой итерации

<u>**Цель:**</u> формирование навыков нахождения корней СЛАУ методом простой итерации

Краткие теоретические сведения

Если в системе линейных уравнений много неизвестных, схема метода Гаусса, позволяющая получить точное решение, становится громоздкой и сложной. В таких случаях для нахождения корней системы более удобно пользоваться **приближёнными итерационными методами.**

К простейшим итерационным методам решения СЛАУ относятся метод простой итерации и метод Зейделя.

Пусть дана система уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

Введем матрицу $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$, векторы $\overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ и $\overline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$,

и перепишем исходную систему в матричном виде $A\overline{x} = \overline{b}$. $\qquad (1')$

Предположим, что диагональные коэффициенты $a_{ii} \neq 0, i = \overline{1,n}$. Разрешим первое уравнение системы (1) относительно x_1, другое – относительно x_2 и т. д.

Получим эквивалентную систему уравнений: $\overline{x} = \alpha\overline{x} + \overline{\beta},$ $\qquad (2)$

где $a = \{a_{ij}\}$ - матрица с компонентами $a_{ij} = -\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}}$ при $i \neq j$ и $a_{ij} = 0$ при $i = j, j = \overline{1,n};$ $\beta = \{\beta_i\}$ - вектор с компонентами $\beta_i = \dfrac{b_i}{a_{ii}}$, $i = \overline{1,n}.$

Систему вида (2) называют **приведенной**.

Последовательность приближений строится согласно правилу $\overset{(k+1)}{\overline{x}} = \alpha \overset{k}{\overline{x}} + \beta,$ $k = 0,1,2,\ldots$ или покоординатно, т.е. $\overset{k+1}{x} = \alpha \overset{k}{x} + \beta$, $i = \overline{1,n};$ $k = 0,1,2,\ldots .$

Начальное приближение $\overline{x_0}$ выбирается, вообще говоря, произвольно, (чаще всего в качестве начального приближения берётся столбец свободных членов).

Пример. Привести СЛАУ к виду, пригодному для применения метода простой итерации.

$$\begin{cases} 5.8x1 + 2.3x2 - 0.2x3 = 3.1 \\ 0.3x1 + 4.0x2 + 1.2x3 = -1.7 \\ 1.7x1 - 0.7x2 - 6.7x3 = 1.1 \end{cases}$$

Решение. Зададим начальное приближение

$$\begin{cases} x1 = -0.397x2 + 0.035x3 + 0.535 \\ x2 = -0.075x1 - 0.300x3 - 0.425 \\ x3 = 0.254x1 - 0.105x2 - 0.164 \end{cases}$$

Приведенная система имеет вид:

$$\overset{0}{x} = \begin{pmatrix} 0.535 \\ -0.425 \\ -0.164 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} k+1 \\ x1 \\ k+1 \\ x2 \\ k+1 \\ x3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 0.3970.035 \\ -0.0750 - 0.030 \\ 0.254 - 0.1050 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k \\ x1 \\ k \\ x2 \\ k \\ x3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.535 \\ -0.425 \\ -0.164 \end{pmatrix}$$

Запишем итерационный процесс в развёрнутом виде. В качестве нулевого приближения возьмём, например, вектор-столбец свободных членов.

Теорема. Процесс простой итерации (3) для приведенной системы (2) сходится к единственному решению независимо от выбора начального приближения $\overset{0}{x}$, если какая-либо норма матрицы α меньше единицы.

Таким образом, для итерационного процесса (3) достаточным условием сходимости является условие $\|\alpha\| < 1$.

Чтобы проверить выполнимость достаточного признака сходимости (3) на практике, чаще всего используют следующие нормы матрицы:

$$\|\alpha\|_1 = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|, \qquad \|\alpha\|_{II} = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|,$$

Можно доказать, что при выполнении достаточного признака сходимости итерационного процесса оценка метода простой итерации будет следующая:

$$\left\| \bar{x} - \overset{k+1}{\bar{x}} \right\| \le \frac{\|\alpha\|^{k+1}}{1 - \|\alpha\|} \cdot \|\beta\|. \qquad (4)$$

В качестве начального приближения можно выбрать вектор свободных членов.

На практике процесс итераций прерывается, если $\max\limits_{1 \le i \le n} \left| \overset{k+1}{x_i} - \overset{k}{x_i} \right| \le \varepsilon$,

где ε - заданная точность.

С помощью формулы (4) можно получить оценку для количества итераций k, которые необходимо выполнить, чтобы получить решение с заданной точностью ε.

Пример. Найти нижнюю границу оценки числа итераций для метода простой итерации решения системы уравнений из примера, приведённого выше, при $\varepsilon = 0.01$.

Решение. Заметим, что коэффициенты полученной приведенной системы удовлетворяют условиям теоремы сходимости

$$\sum_{j=1}^{3} \left|a_{1j}\right| = 0.432, \sum_{j=1}^{3} \left|a_{2j}\right| = 0.375, \sum_{j=1}^{3} \left|a_{3j}\right| = 0.359.$$

Таким образом, сходимость процесса простой итерации гарантирована.

Использовав (4), получим $\frac{\|a\|^{k+1}}{1-\|a\|}\|\beta\| = \frac{0.432^{k+1}}{1-0.432} \cdot 0.535 = 0.432^{k+1} \cdot 0.941$

или

$$0.432^{k+1} \cdot 0.941 \le 0.01$$
$$0.432^{k+1} \le 0.011, (k+1)\lg 0.432 \le \lg 0.011$$
$$k+1 \le \frac{\lg 0.011}{\lg 0.432}, k \ge 5.37, k \ge 6.$$

Решим полученное неравенство относительно к:

Таким образом, когда выполнены шесть итераций, нахождение решения исходной СЛАУ с точностью ε=0.01 гарантировано.

Варианты заданий

Решите следующие системы уравнений методом простой итерации с точностью ε=0.001:

1. $$\begin{cases} 5.8x_1 + 2.3x_2 - 0.2x_3 = 3.1 \\ 0.3x_1 + 4.0x_2 + 1.2x_3 = -1.7 \\ 1.7x_1 - 0.7x_2 - 6.7x_3 = 1.1 \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} 24.21x_1 + 2.42x_2 + 3.58x_3 = 30.24 \\ 2.31x_1 + 31.49x_2 + 1.52x_3 = 40.95 \\ 3.49x_1 + 4.85x_2 + 28.72x_3 = 42.81 \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} 4.5x_1 - 1.8x_2 + 3.6x_3 = -1.7 \\ 3.1x_1 + 2.3x_2 - 1.2x_3 = 3.6 \\ 1.8x_1 + 2.5x_2 + 4.6x_3 = 4 \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} 0.31x_1 + 0.14x_2 + 0.30x_3 + 0.27x_4 = 1.02 \\ 0.26x_1 + 0.32x_2 + 0.18x_3 + 0.24x_4 = 1.00 \\ 0.61x_1 + 0.22x_2 + 0.20x_3 + 0.31x_4 = 1.34 \\ 0.40x_1 + 0.34x_2 + 0.36x_3 + 0.17x_4 = 1.27 \end{cases}$$

5. $$\begin{cases} 21.7x_1 + 3.3x_2 + 1.3x_3 = 2.1 \\ 3.5x_1 - 12.7x_2 + 2.8x_3 = 1.7 \\ 4.1x_1 + 5.8x_2 - 13.7x_3 = 0.8 \end{cases}$$

6. $$\begin{cases}4x_1 + 0.24x_2 - 0.08x_3 = 8 \\ 0.09x_1 + 3x_2 - 0.15x_3 = 9 \\ 0.04x_1 - 0.08x_2 + 4x_3 = 20\end{cases}$$

7. $$\begin{cases}2x_1 - x_2 + x_3 = -3 \\ 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 - 4x_2 + 10x_3 = 0\end{cases}$$

8. $$\begin{cases}10x_1 + x_2 + x_3 = 12 \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 = 13 \\ 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 14\end{cases}$$

9. $$\begin{cases}7.6x_1 + 0.5x_2 + 2.4x_3 = 1.9 \\ 2.2x_1 + 9.1x_2 + 4.4x_3 = 9.7 \\ -1.3x_1 + 0.2x_2 + 5.8x_3 = -1.4\end{cases}$$

10. $$\begin{cases}7.7x_1 + 0.4x_2 - 2.1x_3 + 1.8x_4 = 12.4 \\ -4.5x_1 + 12.3x_2 - 0.6x_3 = 8.8 \\ -2.6x_1 - 3.4x_2 + 11.1x_3 = 6.2 \\ -0.5x_1 + 2.6x_2 - 3.4x_3 + 11.2x_4 = -11.7\end{cases}$$

11. $$\begin{cases}8.7x_1 - 2.2x_2 + 3.3x_3 - 0.7x_4 = 1.1 \\ -4.5x_1 + 10x_2 + 2.3x_3 - 0.7x_4 = -3.3 \\ -1.1x_1 + 10.8x_3 - 7.8x_4 = 8.5 \\ -0.8x_1 - 0.9x_2 - 3.3x_3 + 7.9x_4 = -17\end{cases}$$

12. $$\begin{cases}2.12x_1 + 0.42x_2 + 1.34x_3 + 0.88x_4 = 11.172 \\ 0.42x_1 + 3.95x_2 + 1.87x_3 + 0.43x_4 = 0.115 \\ 1.34x_1 + 1.87x_2 + 2.98x_3 + 0.64x_4 = 9.009 \\ 0.88x_1 + 0.34x_2 + 0.46x_3 + 4.44x_4 = 9.349\end{cases}$$

13. $$\begin{cases}20.9x_1 + 1.2x_2 + 2.12x_3 + 0.9x_4 = 21.70 \\ 1.2x_1 + 21.2x_2 + 1.5x_3 + 2.5x_4 = 27.46 \\ 2.1x_1 + 1.5x_2 + 19.8x_3 + 1.3x_4 = 28.76 \\ 0.9x_1 + 2.5x_2 + 1.3x_3 + 32.1x_4 = 49.72\end{cases}$$

14. $$\begin{cases}6.1x_1 + 2.2x_2 + 1.2x_3 = 16.55 \\ 2.2x_1 + 5.5x_2 - 1.5x_3 = 10.55 \\ 1.2x_1 + 1.5x_2 + 7.2x_3 = 16.80\end{cases}$$

15 $$\begin{cases}3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ -5x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4 = -12 \\ 2x_1 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 3\end{cases}$$

Порядок выполнения лабораторной работы

1. Привести заданную СЛАУ вида $A\overline{x} = \overline{b}$, к виду, пригодному для применения метода простой итерации, т.е. к виду $\overline{x} = \alpha\overline{x} + \overline{\beta}$.

2. Найти норму $\|\alpha\|$ матрицы α

3. Найти нижнюю границу оценки числа итераций, необходимых для достижения заданной точности

4. Решить заданную систему уравнений методом простой итерации с подсчётом числа итераций

6. Оформить отчёт.