2. Приближённые методы решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

2.4. Метод Зейделя

<u>Цель:</u> формирование навыков нахождения корней СЛАУ методом Зейделя

Краткие теоретические сведения

Метод Зейделя представляет собой модификацию метода простой итерации. Основная его идея заключается в том, что при вычислении $(k+1)$ – ого приближения неизвестной x_i, используются вычисленные ранее $(k+1)$-ые приближения неизвестных $x_1, x_2, ..., x_{i-1}$.

Алгоритм метода Зейделя для системы $\overline{x} = \alpha\overline{x} + \overline{\beta},$ (2)

следующий:

$$\begin{aligned}
\overset{k+1}{x_1} &= a_{12}\overset{k}{x_2} + a_{13}\overset{k}{x_3} + ... + a_{1n}\overset{k}{x_n} + \beta_1, \\
\overset{k+1}{x_2} &= a_{21}\overset{k+1}{x_1} + a_{23}\overset{k}{x_3} + ... + a_{2n}\overset{k}{x_n} + \beta_2, \\
&... \\
\overset{k+1}{x_n} &= a_{n1}\overset{k+1}{x_1} + a_{n2}\overset{k+1}{x_2} + ... + a_{nn}\overset{k}{x_n} + \beta_n.
\end{aligned}$$

Теорема сходимости для метода простой итерации справедлива и для метода Зейделя. Как правило, метод Зейделя даёт лучшую сходимость, чем метод простой итерации.

Контрольные вопросы

1. В чём сущность метода простой итерации решения СЛАУ?
2. Сформулируйте достаточный признак сходимости метода простой итерации.
3. Чем отличаются методы простой итерации и метод Зейделя?
4. Когда завершается процесс интегрирования при практическом использовании методов простой итерации и метода Зейделя?

Варианты заданий

Решите следующие системы уравнений методом Зейделя с точностью ε=0.001:

1. $$\begin{cases} 5.8x_1 + 2.3x_2 - 0.2x_3 = 3.1 \\ 0.3x_1 + 4.0x_2 + 1.2x_3 = -1.7 \\ 1.7x_1 - 0.7x_2 - 6.7x_3 = 1.1 \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} 24.21x_1 + 2.42x_2 + 3.58x_3 = 30.24 \\ 2.31x_1 + 31.49x_2 + 1.52x_3 = 40.95 \\ 3.49x_1 + 4.85x_2 + 28.72x_3 = 42.81 \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} 4.5x_1 - 1.8x_2 + 3.6x_3 = -1.7 \\ 3.1x_1 + 2.3x_2 - 1.2x_3 = 3.6 \\ 1.8x_1 + 2.5x_2 + 4.6x_3 = 4 \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} 0.31x_1 + 0.14x_2 + 0.30x_3 + 0.27x_4 = 1.02 \\ 0.26x_1 + 0.32x_2 + 0.18x_3 + 0.24x_4 = 1.00 \\ 0.61x_1 + 0.22x_2 + 0.20x_3 + 0.31x_4 = 1.34 \\ 0.40x_1 + 0.34x_2 + 0.36x_3 + 0.17x_4 = 1.27 \end{cases}$$

5. $$\begin{cases} 21.7x_1 + 3.3x_2 + 1.3x_3 = 2.1 \\ 3.5x_1 - 12.7x_2 + 2.8x_3 = 1.7 \\ 4.1x_1 + 5.8x_2 - 13.7x_3 = 0.8 \end{cases}$$

6. $$\begin{cases} 4x_1 + 0.24x_2 - 0.08x_3 = 8 \\ 0.09x_1 + 3x_2 - 0.15x_3 = 9 \\ 0.04x_1 - 0.08x_2 + 4x_3 = 20 \end{cases}$$

7. $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -3 \\ 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 - 4x_2 + 10x_3 = 0 \end{cases}$$

8. $$\begin{cases} 10x_1 + x_2 + x_3 = 12 \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 = 13 \\ 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 14 \end{cases}$$

9. $$\begin{cases} 7.6x_1 + 0.5x_2 + 2.4x_3 = 1.9 \\ 2.2x_1 + 9.1x_2 + 4.4x_3 = 9.7 \\ -1.3x_1 + 0.2x_2 + 5.8x_3 = -1.4 \end{cases}$$

10. $$\begin{cases} 7.7x_1 + 0.4x_2 - 2.1x_3 + 1.8x_4 = 12.4 \\ -4.5x_1 + 12.3x_2 - 0.6x_3 = 8.8 \\ -2.6x_1 - 3.4x_2 + 11.1x_3 = 6.2 \\ -0.5x_1 + 2.6x_2 - 3.4x_3 + 11.2x_4 = -11.7 \end{cases}$$

11. $\begin{cases} 8.7x_1 - 2.2x_2 + 3.3x_3 - 0.7x_4 = 1.1 \\ -4.5x_1 + 10x_2 + 2.3x_3 - 0.7x_4 = -3.3 \\ -1.1x_1 + 10.8x_3 - 7.8x_4 = 8.5 \\ -0.8x_1 - 0.9x_2 - 3.3x_3 + 7.9x_4 = -17 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 2.12x_1 + 0.42x_2 + 1.34x_3 + 0.88x_4 = 11.172 \\ 0.42x_1 + 3.95x_2 + 1.87x_3 + 0.43x_4 = 0.115 \\ 1.34x_1 + 1.87x_2 + 2.98x_3 + 0.64x_4 = 9.009 \\ 0.88x_1 + 0.34x_2 + 0.46x_3 + 4.44x_4 = 9.349 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 20.9x_1 + 1.2x_2 + 2.12x_3 + 0.9x_4 = 21.70 \\ 1.2x_1 + 21.2x_2 + 1.5x_3 + 2.5x_4 = 27.46 \\ 2.1x_1 + 1.5x_2 + 19.8x_3 + 1.3x_4 = 28.76 \\ 0.9x_1 + 2.5x_2 + 1.3x_3 + 32.1x_4 = 49.72 \end{cases}$

14. $\begin{cases} 6.1x_1 + 2.2x_2 + 1.2x_3 = 16.55 \\ 2.2x_1 + 5.5x_2 - 1.5x_3 = 10.55 \\ 1.2x_1 + 1.5x_2 + 7.2x_3 = 16.80 \end{cases}$

15. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ -5x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4 = -12 \\ 2x_1 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 3 \end{cases}$

Порядок выполнения лабораторной работы

1. Привести заданную СЛАУ вида $A\bar{x} = \bar{b}$, к виду, пригодному для применения метода Зейделя, т.е. к виду $\bar{x} = \alpha\bar{x} + \bar{\beta}$.

2. Найти норму $\|\alpha\|$ матрицы α

3. Найти нижнюю границу оценки числа итераций, необходимых для достижения заданной точности

4. Решить заданную СЛАУ методом Зейделя с подсчётом числа итераций

5. Сравнить полученные результаты.

6. Оформить отчёт.