

3.1. Интерполирование функций полиномом Лагранжа

Цель: формирование навыков интерполирования таблично заданных функций полиномом Лагранжа; оценка погрешности полинома Лагранжа

Краткие теоретические сведения

Пусть значения некоторой функции $f(x)$ заданы в виде таблицы:

x	x_0	x_1	$\dots$	x_n
$f(x)$	y_0	y_1	$\dots$	y_n

Необходимо найти значение функции $f(x)$ для такого значения аргумента x , которое принадлежит отрезку $[x_0, x_n]$, но не совпадает ни с одним из значений x_i , $i = \overline{0, n}$. Очевидный способ решения поставленной задачи – вычислить значение $f(x)$ с помощью аналитического выражения функции $f(x)$. Однако, это возможно только в том случае, когда аналитическое выражение функции $f(x)$ пригодно для вычислений.

Часто аналитическое выражение функции $f(x)$ вообще неизвестно. В таких случаях применяют особый способ – построение по заданным значениям x_i, y_i (1) **интерполирующей функции** $F(x)$, которая в некотором смысле близка к $f(x)$. Аналитическое выражение функции $F(x)$ можно использовать для вычислений, если приближенно положить, что $f(x) = F(x)$.

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$; $x_0, x_1, \dots, x_n$ – различные точки этого отрезка, называемые **узлами** ($a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$). Предположим, нам известны значения y_i данной функции в узлах x_i , это значит, $f(x_i) = y_i$, $i = \overline{0, n}$. Задача интерполирования функции $f(x)$ на $[a, b]$ заключается в том, чтобы подобрать полином с вещественными коэффициентами степени не выше n вида

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = \sum_{k=0}^n a_k x^k,$$

принимаящий в узлах x_i , те же значения y_i , что и функция f , т.е.

$$P_n(x_i) = \sum a_k x_i^k = f(x_i), \quad i = \overline{0, n}.$$

Построенный таким образом полином $P_n(x)$ называют **интерполяционным**, а узлы $x_0, x_1, \dots, x_n$ – **узлами интерполирования**. Нетрудно показать, что сформулированная так задача интерполяции разрешима, причём единственным образом.

Рассмотрим узел x_k . Коэффициенты Лагранжа $\omega_k(x)$ определяются следующими условиями:

- а) степень его равна n ;
- б) он обращается в единицу при $x = x_k$ и в 0 — во всех других узлах $x_i (i \neq k)$.

Число узлов $x_i (i \neq k)$ равно n (а это и есть различные корни полинома $\omega(x)$). Если принять во внимание условие $\omega_k(x_k) = 1$, то

$$\omega_k(x) = \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)}$$

Коэффициент Лагранжа $\omega_k(x)$ можно записать в более простой форме, если ввести многочлен $\omega(x)$, для которого узлы $x_0, x_1, \dots, x_n$ будут различными нулями $\omega(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$.

Тогда очевидно, что
$$\omega_k(x) = \frac{\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)}.$$

Интерполяционный полином, построенный с помощью коэффициентов Лагранжа, имеет вид
$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)} f(x_k). \quad (2)$$

Нетрудно показать, что его степень не выше n , и что в узлах x_i он принимает значения $f(x_i)$, $i = \overline{0, n}$. Заметим, что интерполяционный полином Лагранжа в общем случае может строиться для неравноудаленных узлов.

Пример. Для функции $y = \sin(\pi x)$ $y = \sin(\pi x)$ построить интерполяционный полином Лагранжа, выбрав узлы $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{6}$, $x_2 = \frac{1}{2}$.

Решение. Вычислим соответствующие значения функции в узлах: $y_0 = 0$, $y_1 = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $y_2 = \sin \frac{\pi}{2} = 1$.

По формуле (2)
$$L_2(x) = \frac{(x-\frac{1}{6})(x-\frac{1}{2})}{(0-\frac{1}{6})(0-\frac{1}{2})} \cdot 0 - \frac{(x-0)(x-\frac{1}{2})}{(\frac{1}{6}-0)(\frac{1}{6}-\frac{1}{2})} \cdot \frac{1}{2} + \frac{(x-0)(x-\frac{1}{6})}{(\frac{1}{2}-0)(\frac{1}{2}-\frac{1}{6})} \cdot 1$$

или
$$L_2(x) = \frac{7}{2}x - 3x^2.$$

Формула Лагранжа удобна для использования в задачах интерполирования многих функций в точке x , поскольку все значения множителей $\omega_k(x)$ можно вычислить сразу для всех функций. Однако формула Лагранжа имеет существенный недостаток: иногда заданное число узлов недостаточно для достижения заданной точности. Тогда к заданным узлам добавляют ещё один или несколько и проводят вычисления заново.

Интерполяционный полином Лагранжа, принимает в узлах $x_0, x_1, \dots, x_n$ значения $y_0, y_1, \dots, y_n$. Возникает вопрос: насколько построенный полином близок к функции $f(x)$ в других точках, т.е. насколько велик остаточный член

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x).$$

Для абсолютной погрешности интерполяционной формулы Лагранжа можно получить следующую оценку: $|R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega(x)|$,

где $M_{n+1} = \max_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)|$, $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$.

Пример. С какой точностью с помощью интерполяционной формулы Лагранжа можно вычислить $\sqrt{115}$ для функции $y = \sqrt{x}$, если выбрать узлы интерполирования $x_0 = 100$, $x_1 = 121$, $x_2 = 144$?

Решение. По условию имеем три узла, следовательно, $n+1=3$, откуда $n=2$. Тогда $y' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$, $y'' = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$, $y''' = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}$.

Откуда $M_3 = \max |y'''| = \frac{3}{8}10^{-5}$ при $100 \leq x \leq 144$.

По формуле (3) получим

$$|R_3(115)| \leq \frac{3}{8} \cdot 10^{-5} \cdot \frac{1}{3!} |(115-100)(115-121)(115-144)| = \frac{1}{16} \cdot 10^{-5} \cdot 15 \cdot 6 \cdot 29 \approx 1.6 \cdot 10^{-3}.$$

Контрольные вопросы

- 1) Когда возникает необходимость в использовании интерполяционных методов?
- 2) В чём сущность задачи интерполирования?
- 3) Как строится интерполяционный многочлен Лагранжа?
- 4) Как оценивается погрешность интерполяционной формулы Лагранжа?

Варианты заданий

А. Задана таблица значений функции $f(x)$. С помощью полинома Лагранжа найти значение функции $f(x)$ в заданной точке:

1) $x=1.52$;

x	1.50	1.54	1.56	1.60	1.63	1.70
$f(x)$	3.873	3.924	3.950	4.000	4.037	4.123

2) $x=2.22$;

x	2.0	2.3	2.5	3.0	3.5	3.8	4.0
$f(x)$	5.848	6.127	6.300	6.694	7.047	7.243	7.368

3) $x=1.68$;

x	1.60	1.64	1.66	1.70	1.73	1.80
$f(x)$	2.873	2.924	2.950	3.000	3.037	3.123

4) $x=3.0$

x	-3.2	-0.8	0.4	2.8	4.0	6.4
$f(x)$	-1.9449	-0.6126	0.3097	1.8068	2.0913	1.4673

5) $x=2.78$

x	1.2	1.9	3.3	4.7	5.4	6.8
$f(x)$	0.3486	1.0537	1.7844	2.2103	2.3712	2.6322

6) $x=5.21$;

x	1.3	2.1	3.7	4.5	6.1	7.7	8.5
$f(x)$	1.777	4.5634	13.8436	20.3952	37.3397	59.4051	72.3593

7) $x=27$;

x	14	17	31	35
$f(x)$	-1.9449	-0.6126	0.3097	1.8068

8) $x=2.22$;

x	2.0	2.3	2.5	3.0	3.5	3.8	4.0
$f(x)$	5.848	6.127	6.300	6.694	7.047	7.243	7.368

9) $x=102$;

x	93.0	96.2	100.0	104.2	108.7
$f(x)$	-1.9449	-0.6126	0.3097	1.8068	2.0913

10) $x=0.5$;

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-1.9449	-0.6126	0.3097	1.8068	2.0913

11) $x=5$;

x	0	2	3	6	7	9
$f(x)$	658503	704969	729000	804357	830584	884736

12) $x=0.45$;

x	0.05	0.15	0.20	0.25	0.35	0.40	0.50
$f(x)$	0.9512	8607	0.8187	0.7788	0.7047	0.6703	0.6065

13) $x=1.29$;

x	1.00	1.08	1.13	1.20	1.27	1.31	1.35
$f(x)$	1.1752	1.3025	1.3863	1.5095	1.2173	1.2236	1.2317

14) $x=6$;

x	0	1	3	5	7	9
$f(x)$	658503	704969	729000	804357	830584	884736

15) $x=1.45$.

x	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
$f(x)$	0.5652	0.6375	0.7147	0.7979	0.8861	0.9817

Б.

1). По известным значениям $\ln 100$, $\ln 101$, $\ln 102$, $\ln 103$ найти значение $\ln 100.5$ и оценить погрешность;

2). Зная значения функции $\sin(x)$ при $x=0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$, вычислить значение $\sin \frac{\pi}{7}$ и оценить погрешность;

3). Функция $y = \sqrt[3]{x}$ задана таблично. Найти $\sqrt[3]{1.15}$ и оценить погрешность.

x	1.0	1.1	1.3	1.5
y	1.000	1.032	1.091	1.145

4). Зная значения $\sqrt{x}$ при $x = 49, 64, 81, 100$, найти $\sqrt{77}$ и оценить погрешность.

5). Зная значения $\cos x$ при $x = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$, вычислить значение $\cos \frac{\pi}{7}$ и оценить погрешность.

6). Функция $y = \sqrt[3]{x}$ задана таблично. Найти $\sqrt[3]{1.21}$ и оценить погрешность.

x	1.1	1.3	1.5
y	1.032	1.091	1.145

7) Зная значения $\sin(x)$ при $x = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$, вычислить значение $\sin \frac{\pi}{5}$ и оценить погрешность.

8) Зная значения $\cos(x)$ при $x = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$, вычислить значение $\cos \frac{\pi}{5}$ и оценить погрешность.

9) Зная значения $\sin(x)$ при $x = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$, вычислить значение $\sin \frac{\pi}{12}$ и оценить погрешность.

10) Зная значения $\cos x$ при $x = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$, вычислить значение $\cos \frac{\pi}{5}$ и оценить погрешность.

11) Зная значения $\sqrt{x}$ при $x = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$, вычислить значение $\sin \frac{\pi}{5}$ и оценить погрешность.

12) Зная значения $\sin(x)$ при $x = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$, вычислить значение $\sin \frac{\pi}{5}$ и оценить погрешность.

13) Функция $y = e^x$ задана таблично. Найти $e^{0.506}$ и оценить погрешность.

x	0.50	0.51	0.52
y	1.6487	1.6653	1.6852

14) Функция $y = \frac{1}{x}$ задана таблично. Найти $\frac{1}{2.718}$ и оценить погрешность.

x	2.70	2.72	2.74
y	1.6487	1.6653	1.6852

13) Функция $y = \frac{1}{x}$ задана таблично. Найти $\frac{1}{2.734}$ и оценить погрешность.

x	2.70	2.72	2.74
y	1.6487	1.6653	1.6852

Порядок выполнения лабораторной работы

- 1) Проинтерполировать с помощью полинома Лагранжа функции в заданиях I и II в заданных точках.
- 2) Оценить погрешность интерполирования для функции из задания II в изменяющейся точке x .
- 3) Выполнить интерполирование полиномом Лагранжа функции из заданий А и Б в дополнительных узлах
- 4) Сравнить полученные результаты.
- 5) Оформить отчёт.