3.2. Интерполирование функций полиномом Ньютона

Цель: формирование навыков интерполирования таблично заданных функций полиномом Ньютона; оценка погрешности формул Ньютона.

Краткие теоретические сведения

Узлы интерполирования называются **равноудаленными**, если

$$x_{i+1} - x_i = \Delta x_i = h = \text{const}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Конечными разностями функции $y=f(x)$ называют разности вида:

$$\Delta y_i = \Delta y_{i+1} - y_i \text{ -- конечные разности первого порядка;}$$

$$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i \text{ -- конечные разности второго порядка;}$$

$$\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i \text{ - конечные разности } k \text{-ого порядка.}$$

Для наглядности удобно размещать значения x , y и конечные разности в таблицу:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_0$	$\Delta^5 y_0$
x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$	$\Delta^4 y_1$	
x_2	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_2$		
x_3	y_3	Δy_3	$\Delta^2 y_3$			
x_4	y_4	Δy_4				
x_5	y_5					

Для таблиц с равноудаленными узлами построение интерполяционных формул (и вычисления по ним) значительно упрощается.

Первая интерполяционная формула Ньютона:

$$P_n(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \dots + \frac{q(q-1)\dots(q-n+1)}{n!} \Delta^n y_0, \quad (1)$$

где $q = \frac{x - x_0}{h}$.

Формула (1) применяется для интерполирования в точках x , близких к началу таблицы. Заметим, что в ней используется верхняя горизонтальная строка таблицы разностей.

Вторая интерполяционная формула Ньютона:

$$P_n(x) = y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!} \Delta^2 y_{n-2} + \dots + \frac{q(q+1)\dots(q+n-1)}{n!} \Delta^n y_0, \quad (2)$$

где $q = \frac{x - x_n}{h}$.

Формула (2) применяется для интерполирования в точках x , близких к концу таблицы. В ней используется нижняя диагональная строка таблицы конечных разностей.

Оценка остаточного члена формулы (1) имеет вид:

$$|R_n(x)| \leq h^{n+1} \frac{|q(q-1)\dots(q-n)|}{(n+1)!} M_{n+1}, \quad q = \frac{x-x_0}{h}. \quad (3)$$

Оценка остаточного члена формулы (2):

$$|R_n(x)| \leq h^{n+1} \frac{|q(q+1)\dots(q+n)|}{(n+1)!} M_{n+1}, \quad q = \frac{x-x_n}{h}, \quad (4)$$

где $M_{n+1} = \max_{x_0 \leq x \leq x_n} |f^{(n+1)}(\xi)|$, ξ - некоторое промежуточное значение между узлами интерполирования $x_0, x_1, \dots, x_n$ и рассматриваемой точкой x .

На практике при малых значениях h и при условии непрерывности $f^{(n+1)}(x)$ приближенно полагают $f^{(n+1)}(\xi) \approx \frac{\Delta^{n+1} Y_0}{h^{n+1}}$.

При этом условии оценки (3) и (4) остаточных членов первой и второй интерполяционных формул Ньютона имеют вид соответственно:

$$|R_n(x)| \leq \frac{|q(q-1)\dots(q-n)|}{(n+1)!} \Delta^{n+1} Y_0, \quad (5)$$

$$|R_n(x)| \leq \frac{|q(q+1)\dots(q+n)|}{(n+1)!} \Delta^{n+1} Y_0. \quad (6)$$

Формулы (5) и (6) удобны тем, что позволяют получить оценки погрешности метода интерполирования без исследования $(n+1)$ -ой производной интерполируемой функции, в частности в случае эмпирически заданной функции.

Очевидно, что при построении интерполяционных формул Ньютона в них не используются те слагаемые, которым соответствуют конечные разности равные или близкие к нулю. Поэтому при практических вычислениях интерполяционные формулы Ньютона обрываются на слагаемых, содержащих такие разности, которые в пределах заданной точности можно считать постоянными.

Пример 1. По заданной таблице значений функции $x = \lg(x)$ найти $\lg(1001)$.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
1000	3.0000000	43214	-426	8
1010	3.0043214	42788	-418	9
1020	3.0086002	42370	-409	8
1030	3.0128372	41961	-401	
1040	3.0170333	41560		
1050	3.0211896			

Решение. Построим таблицу конечных разностей, записывая их в единицах седьмого разряда. Заметим, что разности третьего порядка практически неизменны. Поэтому в формуле (1) достаточно положить $n = 3$

$$P_3 = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!} \Delta^3 y_0.$$

Для $x = 1001$ имеем, что $q = 0.1$. Таким образом, получим:

$$\begin{aligned} \lg 1001 &= 3.0000000 + 0.1 \cdot 0.0043214 + \frac{0.1 \cdot 0.9}{2} \cdot 0.0000426 + \\ &+ \frac{0.1 \cdot 0.9 \cdot 1.9}{6} \cdot 0.0000008 = 3.000434. \end{aligned}$$

Пример 2. Используя таблицу значений функции $y = \sin(x)$, найти $\sin 54^\circ$ и точность результата.

Решение. Построим таблицу конечных разностей:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
30°	0.5000	736	-44	-5
35°	0.5736	692	-49	-6
40°	0.6428	643	-54	-3
45°	0.7071	589	-57	
50°	0.7660	532		
55°	0.8192			

Заметим, что третьи разности практически неизменны. Поэтому в формуле (2) достаточно взять четыре слагаемых. Для нахождения $P_3(x)$ имеем:

$$q = \frac{54^\circ - 55^\circ}{5^\circ} = -0.2. \quad \text{По формуле (2) получаем:}$$

$$\sin 54^\circ = 0.8192 + (-0.2) \cdot 0.032 - \frac{(-0.2) \cdot 0.8}{2} \cdot 0.0057 - \frac{(-0.2) \cdot 0.8 \cdot 1.8}{3} \cdot 0.0003 = 0.80903.$$

Оценим остаточный член при $n = 3$ по формуле (4):

$$R_3(x) = h^4 \frac{|q(q+1)(q+2)(q+3)|}{4!} f^{(4)}(\xi).$$

В нашем случае $h = 5^\circ = 0.0873$, $q = -0.2$, $f^{(4)}(\xi) = \sin \xi \leq 1$.

$$\text{Таким образом, } |R_3(54^\circ)| \leq \frac{0.087^4 \cdot 0.2 \cdot 0.8 \cdot 2.8}{24} \approx 0.2 \cdot 10^{-5}.$$

Контрольные вопросы

- 1) Как строятся интерполяционные полиномы Ньютона?
- 2) Что такое конечные разности?
- 3) Как осуществляется оценка погрешности метода интерполирования в том случае, когда: а) интерполируемая функция задана аналитически; б) интерполируемая функция задана таблично?

Варианты заданий

Функции $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ заданы таблицами.

x	f(x)	x	g(x)	x	h(x)
1.50	0.51183	1.0	0.5652	0.00	0.28081
1.51	0.50624	1.1	0.6375	0.05	0.31270
1.52	0.50064	1.2	0.7147	0.10	0.94549
1.53	0.49503	1.3	0.7973	0.15	0.37904
1.54	0.48940	1.4	0.8861	0.20	0.41318
1.55	0.48376	1.5	0.9817	0.25	0.44774
1.56	0.47245	1.6	1.0848	0.30	0.48255
1.57	0.46678	1.7	1.1964	0.35	0.51745
1.58	0.46678	1.8	1.3172	0.40	0.55226
1.59	0.46110	1.9	1.4482	0.45	0.58682
1.60	0.45540	2.0	1.5906	0.50	0.62096

Используя первую или вторую интерполяционную формулу Ньютона, найти значения этих функций для заданных значений аргумента:

1.50911 для функции $f(x)$	1.50820 для функции $f(x)$
1.59513 для функции $f(x)$	1.59614 для функции $f(x)$
1.59728 для функции $f(x)$	1.0113 для функции $g(x)$
1.0321 для функции $g(x)$	1.9592 для функции $g(x)$
1.0428 для функции $g(x)$	1.9819 для функции $g(x)$
0.01928 для функции $h(x)$	0.02475 для функции $h(x)$
0.47113 для функции $h(x)$	0.48398 для функции $h(x)$
0.48675 для функции $h(x)$	0.12440 для функции $h(x)$

Порядок выполнения лабораторной работы

- 1) Составить таблицу конечных разностей с помощью табличного процессора.
- 2) Используя табличный процессор, проинтерполировать заданную функцию в данной точке с помощью многочлена Ньютона.
- 3) Проанализировать полученные результаты, оценить остаточные члены.
- 4) Оформить отчет.