4.1. Численное дифференцирование

Цель: формирование практических навыков численного дифференцирования и оценки точности.

Краткие теоретические сведения

При решении практических задач часто требуется найти производные различных порядков от функции $y = f(x)$, заданной таблицей. Нередко непосредственное дифференцирование даже аналитически заданной функции весьмо сложно. В таких случаях используются численные методы.

Формулы численного дифференцирования получают путем приближения заданной функции $f(x)$ на некотором отрезке $[a,b]$ интерполяционным полиномом $P(x)$: $f'(x) = P'(x)$, $a \le x \le b$.

Аналогичным образом поступают в случае, когда необходимо найти производные высших порядков.

Если для интерполяционной функции $P(x)$ известна погрешность $R(x) = f(x) - P(x)$, то погрешность производной $P'(x)$ выражается формулой: $r(x) = f'(x) - P'(x) = R'(x)$.

Пусть функция $y = f(x)$ задана таблицей значений $y_i = f(x_i)$ в равноудаленных узлах $x_i = x_0 + ih$, $i = 0,1,\ldots,n$. Заменим функцию $y = f(x)$ интерполяционным полиномом Ньютона, построенным для узлов x_i, $i = \overline{0,k}$; $k \le n$:

$$y(x) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \ldots + \frac{t(t-1)\ldots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0,$$

где $t = \dfrac{x - x_0}{h}$, $h = x_{i+1} - x_i$, $i = 0,1,\ldots$

Поскольку $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt} \cdot \dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{dy}{dx}$, то

$$y'(x) = \frac{1}{h}(\Delta y_0 + \frac{2t-1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{3t^2 - 6t + 2}{6}\Delta_3 y_0 + \frac{2t^3 - 9t^2 + 11t - 3}{12}\Delta^4 y_0 + \ldots) \quad (1)$$

Аналогично, если $y'(x) = \dfrac{d(y')}{dx} = \dfrac{d(y')}{dt} \cdot \dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{h} \cdot \dfrac{d(y')}{dx}$, то

$$y'' = \frac{1}{h^2}(\Delta^2 y_0 + (t-1)\Delta^3 y_0 + \frac{6t^2 - 18t + 11}{12}\Delta^4 y_0 + \ldots) \quad (2)$$

Таким же способом при необходимости можно вычислить производные функции $y(x)$ любого порядка.

Заметим, что при нахождении производных $y'(x), y''(x), \ldots$ в требуемой точке x в качестве x_0 нужно выбирать ближайшее табличное значение аргумента.

Формулы для нахождения производных значительно упрощаются, если исходным значением x оказывается один из узлов таблицы. Поскольку в этом случае каждый узел можно считать исходным, то, положив $x = x_0$, (т.е. $t = 0$), получим

$$y'(x_0) = \frac{1}{h}(\Delta y_0 - \frac{\Delta^2 y_0}{2} + \frac{\Delta^3 y_0}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{\Delta^n y_0}{n}) \qquad (3)$$

$$y'' = \frac{1}{h^2}(\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12}\Delta^4 y_0 - \frac{5}{6}\Delta^5 y_0 + \ldots) \qquad (4)$$

Пример 1. Вычислить приближенное значение производной таблично заданной функции $f(x) = \sqrt{x}$ в точке $x = 32$.

x	$y = \sqrt{x}$	Δy	$\Delta^2 y$		$\Delta^4 y$
32	5.657	88	-2	1	-1
33	5.745	86	-1	0	
34	5.831	85	-1		
35	5.916	84			
36	6.000				

Решение. В данном случае шаг $h = 1$. Поскольку значение производной ищется в начале таблицы ($x = 32$), то используем формулу (3) и данные первой строки таблицы: $f'(32) = 0.088 + \frac{0.002}{2} + \frac{0.001}{3} + \frac{0.001}{4} \approx 0.089$.

Для вывода формулы погрешности численного дифференцирования применим оценку остаточного члена первой интерполяционной формулы Ньютона:

$$r_n(x) = R_n'(x) = \frac{h^n}{(n+1)!}\left\{ f^{n+1}(\xi)\frac{d}{dt}\big[t(t-1)\ldots(t-n+1)\big] + t(t-1)\ldots(t-n+1)\frac{d}{dt}f^{n+1}(\xi)\right\}.$$

В случае оценки погрешности в узле таблицы (если $x = x_0$ и $t = 0$) формула упрощается $R_n'(x)\Big|_{x=x_0} = (-1)^n \frac{h^n}{n+1} f^{(n+1)}(\xi)$, поскольку при $t = 0$ производная $\frac{d}{dt}\big[t(t-1)\ldots(t-n+1)\big] = (-1)^n n!$.

На практике найти значение $f^{n+1)}(\xi)$ достаточно трудно, поэтому при достаточно малых h приближенно полагают, что $f^{(n+1)}(\xi) \approx \frac{\Delta^{(n+1)} y_0}{h^{n+1}}$.

Это позволяет использовать приближенную формулу $r_n(x_0) \approx \frac{(-1)^n \Delta^{n+1} y_0}{h(n+1)}$.

<u>Пример 2.</u> Найти значения производных y' и y'' в точке $x=0$ таблично заданной функции и оценить погрешность.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0.00	0.00000	10017	100	101	3
0.05	0.10017	10117	201	104	3
0.10	0.20134	10318	305	107	
0.15	0.30452	10623	412		
0.20	0.41075	11035			
0.25	0.52110				

<u>Решение.</u> В двух первых столбцах таблицы приведены значения аргумента и функции с шагом 0.05. Построим таблицу конечных разностей, которую заполним только до разностей четвертого порядка, поскольку разности более высоких порядков при выбранном шаге практически равны нулю. Для вычисления производных в заданной точке используем формулы (3) и (4), положив $x_0 = 0.00$:

$$y'\big|_{x=0} \approx \frac{1}{h}(\Delta y_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 y_0 - \frac{1}{4}\Delta^4 y_0) = 20\cdot(0.10017 - 0.00050 + 0.00034 - 0.00001) = 2.00000$$

$$y''\big|_{x=0} \approx \frac{1}{h^2}(\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12}\Delta^4 y_0) = 400\cdot(0.00100 - 0.00101 + 0.00003) = 0.00800.$$

Оценим погрешности:

$$r_1(0.0) = -\frac{100\cdot 10^{-5}}{2\cdot 0.05} = -10^{-2}, \qquad r_2(0.0) = -\frac{(-1)^2\Delta^3 y_0}{h\cdot 3} = \frac{101\cdot 10^{-5}}{3\cdot 0.05} = 6.7\cdot 10^{-2}.$$

Заметим, что с повышением порядка производной точность численного дифференцирования значительно понижается. Поэтому на практике редко используют формулы численного дифференцирования для нахождения производных выше второго порядка.

Контрольные вопросы

1) В каких случаях применяются методы численного дифференцирования?
2) В чем заключается некорректность задачи численного дифференцирования?
3) Как оценивается погрешность операции численного дифференцирования?

Варианты заданий

Используя интерполяционную формулу Ньютона, найти значения производных y' и y'' таблично заданных функций в заданных точках и оценить погрешности:

0.60 для функции $f(x)$;	0.65 для функции $f(x)$;
0.70 для функции $f(x)$;	0.75 для функции $f(x)$;
0.80 для функции $f(x)$;	0.05 для функции $g(x)$;
0.10 для функции $g(x)$;	0.15 для функции $g(x)$;
0.20 для функции $g(x)$;	0.35 для функцыі $g(x)$;
1.10 для функции $h(x)$;	1.15 для функции $h(x)$;
1.25 для функции $h(x)$;	1.30для функции $h(x)$.
1.20 для функции $h(x)$	1.35 для функции $h(x)$

x	$f(x)$
0.60	0.56464
0.65	0.60519
0.70	0.64422
0.75	0.68144
0.80	0.71736
0.85	0.75128
0.90	0.78333
0.95	0.81342
1.00	0.84147
1.05	0.86724

x	$g(x)$
0.05	0.99375
0.10	0.99500
0.15	0.99877
0.20	0.98007
0.25	0.96891
0.30	0.95534
0.35	0.93937
0.40	0.92106
0.45	0.90045
0.50	0.87758

x	$h(x)$
1.10	0.89121
1.15	0.91276
1.20	0.93204
1.25	0.94898
1.30	0.97572
1.35	0.98000
1.40	0.98545
1.45	0.99271
1.50	0.99749
1.55	0.99973

Порядок выполнения лабораторной работы

1) Составить таблицу конечных разностей
2) Найти значения y' и y'' данных функций в заданных точках
3) Оценить точность полученных результатов.
4) Оформить отчет.