5.1. Численное интегрирование функций

<u>Цель:</u> формирование практических навыков вычисления определенных интегралов методами трапеций и Симпсона и оценки погрешности используемых методов

Краткие теоретические сведения

Пусть $f(x)$ - вещественная функция, определенная на отрезке $[a,b]$, для которой существует интеграл Римана $\int_a^b f(x)dx$.

Под численным интегрированием подразумевают нахождение приближенного значения этого интеграла. На практике к численным методам интегрирования приходится обращаются довольно часто: когда интеграл не выражается через элементарные функции или подынтегральная функция задана таблично или нахождение первообразной потребует громоздких преобразований.

Заменив подынтегральную функцию интерполяционным полиномом, получим формулу, называемую **квадратурной**:

$$\int_b^a f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) + r, \tag{1}$$

где x_k - узлы интерполирования; A_k - коэффициенты, которые зависят только от выбора узлов, а не от вида функции; $k=\overline{0,n}$; R - остаточный член, определяющий погрешность квадратурной формулы.

Системой узлов отрезок интегрирования $[a,b]$ делится на n равных частей: $x_i = x_0 + ih$, $i = 0,1,\dots,n$; $x_0 = a$, $x_n = b$, $h = \dfrac{b-a}{n}$.

В полученных узлах вычисляются значения подынтегральной функции $y_i = f(x_i)$, $i = 0,1,\dots,n$.

Квадратурные формулы для равноудаленных узлов называют формулами **Ньютона-Котеса**.

Наибольшее практическое значение имеют формулы трапеций и Симпсона.

Формула трапеций: $$\int_a^b f(x)dx = h\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n} y_i\right) \tag{2}$$

Для $f(x) \in C^2[a,b]$, оценка остаточного члена $|R| \le \dfrac{Mh^2}{12}|a-b|$, где $M = \max\limits_{a \le x \le b}|f''(x)|$.

<u>Пример.</u> Задан интеграл $\int_0^1 e^{-x^2} dx$. С какой погрешностью можно вычислить его по формуле трапеций при $n = 10$?

Решение. Для оценки остаточного члена найдем вторую производную функции $y = e^{-x^2}$: $y''(x) = 2(2x^2 - 1)e^{-x^2}$. На отрезке $[0,1]$ абсолютная величина второй производной $|y''(x)|$ имеет наибольшее значение при $x = 0$.

Тогда по формуле (3) при $a = 0$, $b = 1$, будем иметь: $|R| \le \frac{\max|y''|}{12} \cdot h^2 = \frac{2 \cdot (0.1)^2}{12} < 0.002$.

Итак, если отрезок интегрирования разбить на $n = 10$ частей, то можно вычислить интеграл от заданной функции с погрешностью не выше 0.002.

Формула Симпсона.

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left[y_0 + y_{2m} + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2m-2}) + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2m-1})\right], \qquad (4)$$

где $h = \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{2m}$.

Для $f(x) \in C^4[a,b]$ оценка остаточного члена:

$$|R| \le \frac{Mh^4}{180}|b-a|, \quad \text{где} \quad M = \max_{a \le x \le b}\left|f^{IV}(x)\right|.$$

Пример. Задан интеграл $\int_0^1 e^{x^2}dx$. С какой погрешностью его можно вычислить по формуле Симпсона?

Решение. для оценки остаточного члена найдем четвертую производную функции: $y^{IV}(x) = 4(4x^4 + 12x^2 + 3)e^{x^2}$. Четвертая производная $y^{IV}(x)$ имеет наибольшее значение на отрезке $[0,1]$ при $x = 1$.

Тогда $|R| \le \frac{(0.1)^4}{180} \cdot 76 \cdot 2.718 \approx 0.000115$.

Приближенное вычисление интегралов с требуемой точностью легко реализовать с помощью компьютера.

Пусть требуется найти интеграл с точность ε. Используя формулу соответствующего остаточного члена R, выбираем h таким образом, чтобы выполнялось неравенство $|R| < \frac{\varepsilon}{2}$. Потом вычисляем интеграл по приближенной формуле с полученным шагом. При этом вычисления необходимо проводить с таким количеством знаков, чтобы погрешность округления не превышала $\frac{\varepsilon}{2}$.

Пример. Какой шаг интегрирования нужно выбрать, чтобы по формуле трапеций вычислить интеграл с точностью $\varepsilon = 10^{-2}$?

Решение. Остаточный член формулы трапеций имеет вид:

$$R = \frac{(b-a)\cdot h^2}{12} f''(\xi), \quad a < \xi < b.$$

Выбираем шаг интегрирования h так, чтобы выполнялось неравенство $\frac{(b-a)\cdot h^2}{12} \max_{[a,b]} |f''(\xi)| < 0.5 \cdot 10^{-2}$. Вычисляем $f''(x)$: $f''(x) = \frac{2-6x^2}{(1+x^2)^3}$.

Для определения h используем неравенство $\frac{h^2}{12} \cdot 2 < 0.5 \cdot 10^{-2}$.

Итак, для получения требуемой точности достаточно выбрать шаг $h = 0.1$.

Контрольные вопросы

1) В каких случаях используются приближенные методы вычисления определенных интегралов?
2) В чем сущность численного интегрирования?
3) Какие квадратурные формулы вы знаете?
4) Как выбирается шаг интегрирования?

Варианты заданий

Вычислить заданные интегралы по формулам трапеций и Симпсона с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$, определяя шаг интегрирования.

1) $\int_0^2 (e^{x^2} + x)dx$
2) $\int_4^{5.2} (\ln x + x)dx$
3) $\int_0^{1.7} (3x^2 - 4x)dx$
4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+x} dx$
5) $\int_{0.7}^{2.3} \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 0.3}} dx$
6) $\int_{0.5}^{3.5} \sqrt{4x^3 + 1} dx$
7) $\int_0^{2.4} \frac{1}{1+x^3} dx$
8) $\int_{0.1}^{2} \frac{\cos x}{0.3x} dx$
9) $\int_1^{3.2} \sqrt{6x^2 - 5} dx$
10) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{1+\cos x} dx$
11) $\int_0^{2.8} \frac{x}{1+x^3} dx$
12) $\int_{-4}^{-0.8} \frac{2.3}{1+e^{-x}} dx$
13) $\int_{0.5}^{2.5} \sqrt{4\cos x + 1} dx$
14) $\int_{-1}^{2.4} \frac{x}{(1+x^2)^3} dx$
15) $\int_{0.5}^{2.5} \ln(1+x^2) dx$
16) $\int_{-1}^{1} (e^{x^2} - 2x) dx$

Порядок выполнения лабораторной работы

1) Найти шаг интегрирования по формуле трапеций с заданной точностью
2) Вычислить значение заданного интеграла по формуле трапеций
3) Вычислить значение заданного интеграла по формуле Симпсона
4) Сравнить полученные результаты.
5) Оформить отчет.