6.1. Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)

Цель: формирование практических навыков решения ОДУ методами Эйлера и Рунге-Кутты.

Краткие теоретические сведения

Пусть на отрезке $[a,b]$ задана непрерывная функция $f(x,y)$. Требуется найти функцию $y = y(x)$, удовлетворяющую уравнению $y' = f(x,y)$ и начальному условию $y(x_0) = y_0$, т.е. решить **задачу Коши**.

Решить эту задачу численно – значит для заданной последовательности чисел $x_0, x_1, \ldots, x_n$ из отрезка $[a,b]$ и числа y_0 вычислить (приближенно) значения функции $y_0, y_1, \ldots, y_n$ в точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$, не находя самой функции $y = y(x)$.

Метод Эйлера.

Искомая интегральная функция $y = y(x)$ заменяется ломаной, вершинами которой являются точки $M_i(x_i, y_i)$, $i = \overline{0,n};$ а направление отрезка $[M_i, M_{i+1}]$ совпадает с направлением интегральной кривой в точке M_i. Иначе говоря, необходимо, чтобы $\dfrac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(x_i, y_i)$, $x_i = x_0 + ih$, $h = x_{i+1} - x_i$, $i = \overline{0, n-1}$.

Отсюда
$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)(x_{i+1} - x_i). \qquad (1)$$

Формула Эйлера (1), позволяет вычислить значения $y(x_i)$, т.е построить ломаную, аппроксимирующую искомую интегральную кривую (Рис. 2). Погрешность формулы (1) равна $O(h^2)$.

Модификации метода Эйлера

1. Более точным является **усовершенствованный метод Эйлера**, когда сначала вычисляют промежуточные значения

$$x_{k+\frac{1}{2}} = x_k + \frac{h}{2}, \qquad y_{k+\frac{2}{2}} = y_k + \frac{h}{2} \cdot f(x_k, y_k),$$

а потом полагают
$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_{k+\frac{1}{2}}, y_{k+\frac{1}{2}}).$$

2. Другой модификацией метода Эйлера является усовершенствованный **метод Эйлера-Коши,** который заключается в следующем:

сначала выбирают грубое приближение $\tilde{y}_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k, y_k)$,

затем вычисляют $\tilde{f}_{k+1} = f(x_{k+1}, \tilde{y}_{k+1})$,

и, наконец, приближенно полагают, что $y_{k+1} = y_k + h \cdot \dfrac{f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, \tilde{y}_{k+1})}{2}$.

Усовершенствованный метод Эйлера можно еще более уточнить, применив итерационную обработку каждого значения y_k.

Для этого из «грубого» приближения $y_{k+1}^{(0)} = y_k + h \cdot f(x_k, y_k)$ строится итерационный процесс вида $y_{k+1}^{(s)} = y_k + \frac{h}{2} \cdot \left[f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1}^{(s-1)}) \right], \quad i = 1,2,\ldots$. Процесс итерации продолжается до тех пор, пока разность двух последующих приближений $y_{k+1}^{(m)}$ и $y_{k+1}^{(m+1)}$ не станет меньше заданной погрешности. После этого полагают $y_{k+1} \approx y_{k+1}^{(m)}$ - общая часть приближений $y_{k+1}^{(m)}$ и $y_{k+1}^{(m+1)}$.

Метод Эйлера с итерационной обработкой дает на каждом шаге погрешность порядка h^3 и нередко используется в вычислительной практике.

Метод Рунге-Кутта.

Метод Рунге-Кутта является одним из методов повышенной точности и принадлежит к многошаговым методам численного интегрирования задачи Коши $$\frac{dy}{dx} = f(x, y(x)), \ \ y(x_0) = y_0 .$$

Пусть h - шаг интегрирования. Вычисление приближенного значения y_{k+1} при решении задачи Коши в точке x_{k+1} методом Рунге-Кутта заключается в выполнении следующих операций:

- на каждом k – ом шаге определяются коэффициенты

$$k_1 = h \cdot f(x_k, y_k), \qquad k_2 = h \cdot f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{k_1}{2}),$$

$$k_3 = h \cdot f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{k_2}{2}), \qquad k_4 = h \cdot f(x_k + h, y_k + k_3);$$

- вычисляются значения $y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6} \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).$

Контрольные вопросы

1) В чем сущность метода Эйлера при решении задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения?
2) Какие модификации метода Эйлера вы знаете?
3) В чем заключается метод Рунге-Кутта?

Варианты заданий

А. Используя метод Эйлера и его модификации решить следующие дифференциальные уравнения с заданными начальными условиями на отрезке $[a,b]$ при следующих значениях параметров:

1) $y' = y + (1+x)\cdot y^2, \quad y(1) = -1.0, \quad a = 1.0, \quad b = 1.5, \quad h = 0.1;$

2) $y' = \dfrac{x+y}{y-x}, \quad y(0) = 1.0, \quad a = 0.0, \quad b = 1.0, \quad h = 0.1;$

3) $y' = \dfrac{6 - x^2 y^2}{-x^2}, \quad y(1) = 2.0, \quad a = 1.0, \quad b = 1.5, \quad h = 0.05;$

4) $y' = -\dfrac{xy}{\sqrt{1+x^2}}, \quad y(0) = e, \quad a = 0.0, \quad b = 0.5, \quad h = 0.05;$

5) $y' = \dfrac{1-\sin 2x}{\cos x}\cdot y, \quad y(0) = 0.0, \quad a = 0.0, \quad b = 1.0, \quad h = 0.1;$

6) $y' = \dfrac{3y}{2x} + \dfrac{3}{2}xy^{\frac{1}{3}}, \quad y(1) = 0.0, \quad a = 1.0, \quad b = 2.0, \quad h = 0.1;$

7) $y' = \dfrac{2xy^3}{1 - x^2 y^2}, \quad y(2) = 1.0, \quad a = 2.0, \quad b = 2.5, \quad h = 0.05;$

8) $y' = \dfrac{y^2 \ln x - y}{x}, \quad y(2) = 1.0, \quad a = 1.0, \quad b = 2.0, \quad h = 0.1;$

9) $y' = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{y}{x} - 0.25y^2, \quad y(1) = 2.0, \quad a = 1.0, \quad b = 2.0, \quad h = 0.1;$

10) $y' = y + x^2, \quad y(0) = 1.0, \quad a = 0.0, \quad b = 0.5, \quad h = 0.5;$

11) $y' = xy^3 - x^2, \quad y(4) = 0.7, \quad a = 4.0, \quad b = 5.0, \quad h = 0.1;$

12) $y' = \sqrt{4x^2+1} - 3y^2, \quad y(-1) = 0.2, \quad a = -1.0, \quad b = 1.0, \quad h = 0.2;$

13) $y' = \cos(1.5x - y^2) - 3.2, \quad y(2.6) = 1.8, \quad a = 2.6, \quad b = 4.6, \quad h = 0.2;$

14) $y' = x^2 + xy + y^2, \quad y(2.0) = 1.2, \quad a = 2.0, \quad b = 3.0, \quad h = 0.1;$

15) $y' = e^{-(y^2+1)} + 2x, \quad y(0.0) = 0.3, \quad a = 0.0, \quad b = 0.5, \quad h = 0.05.$

Б. Методом Рунге-Кутта найти на отрезке $[a,b]$ решение следующих дифференциальных уравнений с заданными начальными условиями и значениями параметров:

1) $y' = \dfrac{2y}{x} + x, \quad y(1) = 0.0, \quad a = 1.0, \quad b = 2.0, \quad h = 0.1;$

2) $y' = \dfrac{xy}{1+x^2}, \quad y(0) = 2.0, \quad a = 0.0, \quad b = 0.5, \quad h = 0.05;$

3) $y' = y + (1+x)y^2, \quad y(2.0) = 1.2, \quad a = 2.0, \quad b = 3.0, \quad h = 0.1;$

4) $y' = \dfrac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x}, \quad y(1) = 0.0, \quad a = 1.0, \quad b = 2.5, \quad h = 0.1;$

5) $y' = -y\cos x + \cos x \cdot \sin x, \quad y(0.0) = -1.0, \quad a = 0.0, \quad b = 2.0, \quad h = 0.2;$

6) $y' = \dfrac{x^2 y^2 - (2x+1)y + 1}{x}, \quad y(1) = 0.0, \quad a = 1.0, \quad b = 2.5, \quad h = 0.1;$

7) $y' = \dfrac{1 + e^{\frac{x}{y}}}{e^{\frac{x}{y}}(\frac{x}{y} - 1)}, \quad y(0) = 1.0, \quad a = 0.0, \quad b = 2.5, \quad h = 0.1;$

8) $y' = -\dfrac{y}{x} + \ln xy^2, \quad y(1) = -2.0, \quad a = 1.0, \quad b = 2.5, \quad h = 0.1;$

9) $y' = y^2 + \dfrac{y}{x} + \dfrac{1}{x^2}, \quad y(1) = 0.0, \quad a = 1.0, \quad b = 2.5, \quad h = 0.1;$

10) $y' = -\dfrac{xy + 1}{2x^2 - 1}, \quad y(0) = 0.0, \quad a = 0.0, \quad b = 1.5, \quad h = 0.1;$

11) $y' = \dfrac{1}{x^2 + y^2 + 1}, \quad y(0) = 0.0, \quad a = 0.0, \quad b = 2.0, \quad h = 0.2;$

12) $y' = -x^2 y^2 + \dfrac{x^2 - 0.5}{(0.5x^2 + 1)^2}, \quad y(0) = 0.0, \quad a = 0.0, \quad b = 1.0, \quad h = 0.1;$

13) $y' = 4.7x - y^3 + 1.8, \quad y(0.6) = 3.4, \quad a = 0.6, \quad b = 2.6, \quad h = 0.2;$

14) $y' = \dfrac{1}{x^3 y + 1} + 2y, \quad y(1.5) = 2.1, \quad a = 1.5, \quad b = 2.0, \quad h = 0.05;$

15) $y' = x + \dfrac{1}{\sqrt{11}}\cos y, \quad y(2.1) = 2.5, \quad a = 2.1, \quad b = 3.1, \quad h = 0.1.$

Порядок выполнения лабораторной работы

1) Решить заданное обыкновенное дифференциальное уравнение задания I методом Эйлера и его. Полученные результаты сравнить.
2) Решить заданное обыкновенное дифференциальное уравнение задания II методом Рунге-Кутты.
3) Оформить отчет.