

который отличен от нуля, так как узлы x_i — различны. Следовательно, система (3) имеет **единственное решение** при любых правых частях y_i , т. е. коэффициенты интерполяционного многочлена $P_n(x)$ находятся однозначно.

Интерполяционные формулы обычно используют для приближенного вычисления значений данной функции $f(x)$ для значений аргумента x , отличных от узлов интерполирования. Такая операция называется **интерполированием**.

4.1. Интерполяционный полином Лагранжа

Пусть функция $f(x)$ задана таблицей. Построим интерполяционный полином $L_n(x)$, степени не больше n и для которого выполнены условия (3).

Будем искать $L_n(x)$ в виде
$$L_n(x) = l_0(x) + l_1(x) + \dots + l_n(x) \quad (5)$$

где $l_i(x)$ — полином степени n , причем

$$l_i(x_k) = \begin{cases} y_i, & \text{если } i = k \\ 0, & \text{если } i \neq k \end{cases} \quad (6)$$

Требование (6) совместно с (5) обеспечивает выполнение условий (3).

Полиномы $l_i(x)$ составим следующим образом:

$$l_i(x) = c_i(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n) \quad (7)$$

Здесь c_i — постоянный коэффициент, значение которого найдем из первой части условия (6):

$$c_i = \frac{y_i}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}$$

Подставим c_i в (7), тогда с учётом (5), интерполяционный полином Лагранжа будет иметь вид:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)} \quad (8)$$

Пример 1. Построить интерполяционный полином Лагранжа для функции, заданной таблицей:

x	1	3	4
$f(x)$	12	4	6

Решение. Из таблицы видно, что $x_0 = 1$, $x_1 = 3$, $x_2 = 4$, т. е. степень n интерполяционного полинома не выше, чем вторая. Используя формулу (8) получаем:

$$\begin{aligned} L_2(x) &= 12 \frac{(x-3)(x-4)}{(1-3)(1-4)} + 4 \frac{(x-1)(x-4)}{(3-1)(3-4)} + 6 \frac{(x-1)(x-3)}{(4-1)(4-3)} = 2(x^2 - 7x + 12) - \\ &- 2(x^2 - 5x + 4) + 2(x^2 - 4x + 3) = 2x^2 - 12x + 22 \end{aligned}$$

Формуле Лагранжа (8) можно придать более **сжатый вид**.

Обозначим произведение: $\Pi_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$

Продифференцируем это произведение $\Pi_{n+1}(x)$ по x :

$$\Pi'_{n+1}(x) = \sum_{i=0}^n (x - x_0) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)$$

При $x = x_i$ ($i = 0, 1, \dots, n$) имеем:

$$\Pi'_{n+1}(x_i) = (x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)$$

Тогда формула Лагранжа примет вид:

$$\begin{aligned} L_n(x) &= \sum_{i=0}^n y_i \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)} = \\ &= \sum_{i=0}^n y_i \frac{\Pi_{n+1}(x)}{(x - x_i) \Pi'_{n+1}(x_i)} = \Pi_{n+1}(x) \sum_{i=0}^n \frac{y_i}{(x - x_i) \Pi'_{n+1}(x_i)} \end{aligned}$$

Окончательно:

$$L_n(x) = \Pi_{n+1}(x) \sum_{i=0}^n \frac{y_i}{(x - x_i) \Pi'_{n+1}(x_i)} \quad (8c)$$

Полезно рассмотреть два частных случая полинома Лагранжа.

При $n = 1$ имеем две точки, и формула Лагранжа представляет в этом случае уравнение прямой $y = L_1(x)$, проходящей через две эти точки:

$$y = \frac{x - b}{a - b} y_0 + \frac{x - a}{b - a} y_1,$$

где a и b — абсциссы этих точек.

При $n = 2$ получим уравнение параболы $y = L_2(x)$, проходящей через три точки

$$y = \frac{(x - b)(x - c)}{(a - b)(a - c)} y_0 + \frac{(x - a)(x - c)}{(b - a)(b - c)} y_1 + \frac{(x - a)(x - b)}{(c - a)(c - b)} y_2,$$

где a , b и c — абсциссы этих точек.

4.2. Оценка погрешности формулы Лагранжа

Для функции $y = f(x)$ мы построим интерполяционный полином Лагранжа $L_n(x)$, принимающий в точках $x_0, x_1, \dots, x_n$, заданные значения $y_0 = f(x_0), \dots, y_n = f(x_n)$. Возникает вопрос, насколько близок построенный полином приближается к функции $f(x)$ в других точках, т. е. как велик остаточный член $R_n(x) = f(x) - L(x)$.

Предположим, что при $x \in [a, b]$, содержащем все узлы интерполирования, функция $f(x)$ имеет все производные $f'(x), f''(x), \dots, f^{(n+1)}(x)$ до $(n+1)$ -го порядка включительно.

Введем вспомогательную функцию $F(x) = f(x) - L(x) - Cw(x)$ (8), где C — постоянный коэффициент, который будет выбран ниже. Очевидно, $F(x)$ имеет $(n+1)$ корень в точках $x_0, x_1, \dots, x_n$. Подберем коэффициент C так, чтобы $F(x)$ имела $(n+2)$ -й корень в любой фиксированной точке $\bar{x} \in [a, b]$, не совпадающей с узлами интерполирования. Для этого достаточно положить $f(\bar{x}) - L(\bar{x}) - Cw(\bar{x}) = 0$. Так как $w(\bar{x}) \neq 0$, то

$C = \frac{f(\bar{x}) - L(\bar{x})}{w(\bar{x})}$. При этом значении C функция $F(x)$ имеет $(n+2)$ корня на отрезке $[a, b]$

и будет обращаться в нуль на концах каждого из отрезков $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_i, \bar{x}], [\bar{x}, x_{i+1}], \dots, [x_{n-1}, x_n]$. Применяя теорему Ролля к каждому из этих отрезков, убеждаемся, что производная $F'(x)$ имеет не менее $(n+1)$ -го корня. Применив теорему Ролля к производной $F'(x)$, мы убеждаемся, что производная $F''(x)$ имеет n корней на $[a, b]$.

Продолжая эти рассуждения, приходим к заключению, что на рассматриваемом отрезке $[a, b]$ производная $F^{(n+1)}(x)$ имеет хотя бы один корень, который обозначим через ξ , т. е. $F^{(n+1)}(\xi) = 0$. Из (8), так как $L_n^{(n+1)}(x) = 0$ и $w^{(n+1)}(x) = (n+1)!$, имеем:

$F^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - C(n+1)!$. При $x = \xi$ получаем: $0 = f^{(n+1)}(\xi) - C(n+1)!$. Отсюда $C = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$, $\xi \in [a, b]$. С другой стороны, $C = \frac{f(\bar{x}) - L_n(\bar{x})}{w(\bar{x})}$, т. е. $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} = \frac{f(\bar{x}) - L_n(\bar{x})}{w(\bar{x})}$, то

есть $f(\bar{x}) - L_n(\bar{x}) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} w(\bar{x})$. Так как $\bar{x}$ — произвольно, то справедливо

$$R_n(x) = f(x) - L(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} w(\bar{x}), \quad x, \xi \in [a, b].$$

Отсюда, если известна верхняя граница

$$M_{n+1} = \sup_{x \in [a, b]} |f^{(n+1)}(x)|,$$

получим оценку для абсолютной погрешности интерполяционной формулы Лагранжа

$$\left| R_n(x) \right| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |w(x)|, \quad x \in [a, b].$$

Формула Лагранжа удобна в задаче интерполирования многих функций в одной точке x , т. к. все значения множителей $L_k(x)$ можно вычислить однажды для всех функций. Но формула Лагранжа имеет существенный недостаток. Бывает, что заданное число узлов недостаточно для достижения заданной точности. Тогда к данным узлам добавляют еще один или несколько и выполняют вычисления заново.

4.3. Конечные разности различных порядков. Таблица разностей

Часто интерполирование ведется для функций $y = f(x)$ заданных таблицами $y_i = f(x_i)$ с **равностоящими** значениями аргумента. В этом случае **шаг** таблицы $h = x_{i+1} - x_i$, $i = 0, 1, 2, 3, \dots$ является величиной постоянной. Для таких таблиц построение интерполяционных формул заметно упрощается.

Пусть $y = f(x)$ — заданная функция. Обозначим через $h = \Delta x$ фиксированную величину приращения аргумента. Выражение $\Delta y = \Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$ называется **первой конечной разностью**.

Аналогично определяются **конечные разности высших порядков**

$$\Delta^n y = \Delta(\Delta^{n-1} y), \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

Конечные разности последовательности y_i , $i = 0, 1, 2, 3, \dots$ естественно определяются соотношениями:

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i,$$

$$\Delta^2 y_i = \Delta(\Delta y_{i+1}) = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i,$$

.....

$$\Delta^n y_i = \Delta(\Delta^{n-1} y_{i+1}) = \Delta^{n-1} y_{i+1} - \Delta^{n-1} y_i.$$

Конечные разности любого порядка могут быть представлены через значения функции. Действительно, для разности второго порядка имеем:

$$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i = y_{i+2} - y_{i+1} + y_{i+1} - y_i = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i.$$

Аналогично для разности третьего порядка

$$\Delta^3 y_i = \Delta^2 y_{i+1} - \Delta^2 y_i = (y_{i+3} - 2y_{i+2} + y_{i+1}) - (y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i) = y_{i+3} - 3y_{i+2} + 3y_{i+1} - y_i.$$

Методом математической индукции можно доказать, что

$$\Delta^k y_i = \Delta y_{i+k} - k y_{i+k-1} + \frac{k(k-1)}{2!} y_{i+k-2} + \dots + (-1)^k y_i.$$

Конечные разности различных порядков удобно располагать в форме таблицы: **горизонтальной** или **диагональной**.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$
x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	
x_2	y_2	Δy_2		
x_3	y_3			
...				
...				
...				

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
x_0	y_0			
		Δy_0		
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$	
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$	
		Δy_2		
x_3	y_3			

4.4. Первая интерполяционная формула Ньютона

Пусть для функции $y = f(x)$ заданы значения $y_i = f(x_i)$, $x_i = x_0 + ih$, где h — шаг интерполяции, $i = \overline{0, n}$. Требуется подобрать полином $P_n(x)$ степени не выше n , принимающий в точках x_i значения $P_n(x_i) = y_i$.

Следуя Ньютону, будем искать полином в виде:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1}) \quad (9)$$

Задача состоит в определении коэффициентов a_i , $i = \overline{0, n}$ полинома.

Полагая $x = x_0$ в выражении (9), получим $P_n(x_0) = y_0 = a_0$.

Положим $x = x_1$, тогда $P_n(x_1) = y_1 = a_0 + a_1(x_1 - x_0) = y_0 + a_1(x_1 - x_0)$.

А отсюда следует, что $a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta y_0}{h}$.

Положим $x = x_2$, тогда

$$P_n(x_2) = y_2 = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h} 2h + a_2 2h^2.$$

Отсюда
$$a_2 = \frac{y_2 - y_0 - 2y_0}{2h^2} = \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{2h^2} = \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}.$$

Последовательно продолжая этот процесс, получим $a_k = \frac{\Delta^k y_0}{k! h^k}$, $k = \overline{0, n}$.

Заметим, что $0! = 1$ и $\Delta^0 y = y$.

Подставляя найденные коэффициенты a_i в выражение (9), получим **интерполяционный полином Ньютона**:

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1! h} (x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2! h^2} (x - x_0)(x - x_1) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n! h^n} (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1}). \quad (10)$$

Легко видеть, что построенный полином полностью удовлетворяет поставленным требованиям. Его степень не выше n и

$$P_n(x_0) = y_0,$$

$$P_n(x_1) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x_1 - x_0) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{h}h = y_1,$$

$$P_n(x_2) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x_2 - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{h}2h + \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{2h^2}2h^2 = y_2$$

и так далее.

$$\text{Нетрудно показать, что } P_k(x_k) = y_k, \quad k = \overline{1, n}.$$

Для практического использования интерполяционную формулу (10) обычно записывают в несколько преобразованном виде.

$$\text{Введем новую переменную } q = \frac{x - x_0}{h}, \text{ тогда } x = x_0 + qh,$$

$$\frac{x - x_1}{h} = \frac{x_0 + qh - x_0 - h}{h} = q - 1,$$

$$\frac{x - x_2}{h} = \frac{x_0 + qh - x_0 - 2h}{h} = q - 2,$$

.....

$$\frac{x - x_{n-1}}{h} = q - n + 1.$$

Подставляя эти выражения в формулу (10), получим **первую интерполяционную формулу Ньютона**.

$$P_n(x) = y_0 \Delta y + \frac{q(q-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!} \Delta^3 y_0 + \dots + \frac{q(q-1)(q-2)\dots(q-n+1)}{n!} \Delta^n y_0. \quad (11)$$

Эту формулу выгодно использовать для интерполирования функции $y = f(x)$ в окрестности начального значения $x = x_0$, где q мало по абсолютной величине.

При $n = 1$, получим формулу **линейного** интерполирования

$$P_1(x) = y_0 + q \Delta y_0.$$

При $n = 2$ будем иметь формулу **параболического** или **квадратичного** интерполирования

$$P_2(x) = y_0 + q \Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2} \Delta^2 y_0.$$

Замечание 1. Если дана неограниченная таблица значений функции $y = f(x)$, то число n в интерполяционной формуле Ньютона (11) может быть любым. Практически число n в этом случае выбирают так, чтобы разность $\Delta^n y_i$ была постоянной с заданной степенью точности. За начальное значение x_0 можно принимать любое табличное значение аргумента x . Если таблица значений конечна, то число n ограничено, а именно: n не может быть больше числа значений функции y , уменьшенного на 1.

Замечание 2. При применении первой интерполяционной формулы Ньютона удобно пользоваться горизонтальной таблицы разностей, так как тогда нужные значения разностей функции находятся в соответствующей горизонтальной строке таблицы.

4.5. Вторая интерполяционная формула Ньютона

Первая интерполяционная формула Ньютона на практике неудобна для интерполирования вблизи конца таблицы. В этом случае обычно применяется вторая интерполяционная формула Ньютона.

Пусть имеем систему значений функции $y_i = y(x_i)$, $i = \overline{0, n}$ для равноотстоящих значений аргумента $x_i = x_0 + ih$.

Построим интерполяционный полином следующего вида:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_n) + a_2(x - x_n)(x - x_{n-1}) + a_3(x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2}) + \dots + a_n(x - x_n)(x - x_{n-1})\dots(x - x_1). \quad (12)$$

Задача состоит в определении коэффициентов a_i таким образом, чтобы были выполнены равенства: $P_n(x_i) = y_i$ для $i = \overline{0, n}$.

Положим $x = x_n$ в формуле (12). Тогда $P_n(x) = y_n = a_0$,

Для $x = x_{n-1}$, имеем $P_n(x_{n-1}) = y_{n-1} = a_0 + a_1(x_{n-1} - x_n) = a_0 - ha_1 = y_n - ha_1$,

откуда $a_1 = \frac{y_n - y_{n-1}}{h} = \frac{\Delta y_{n-1}}{h}$.

Для $x = x_{n-2}$ получаем:

$$P_n(x_{n-2}) = y_{n-2} = a_0 + a_1(x_{n-1} - x_n) + a_2(x_{n-2} - x_n)(x_{n-2} - x_{n-1}) = y_n - \frac{\Delta y_{n-1}}{h} 2h + a_2(-2h)h,$$

откуда $a_2 = \frac{y_{n-2} - y_n + 2y_{n-1}}{2h^2} = \frac{y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2}}{2h^2} = \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2h^2}$.

Последовательно продолжая этот процесс, мы получим

$$a_i = \frac{\Delta^i y_{n-i}}{i! h^i}, \quad i = \overline{0, n}.$$

Подставляя эти значения в формулу (12) получим **вторую интерполяционную формулу Ньютона**:

$$P_n(x) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{1! h} (x - x_n) + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2! h^2} (x - x_n)(x - x_{n-1}) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n! h^n} (x - x_n)(x - x_{n-1})\dots(x - x_1). \quad (13)$$

Введем более удобную запись полученной формулы. Обозначим $q = \frac{x - x_n}{h}$.

Тогда $\frac{x - x_{n-1}}{h} = \frac{x - x_n + h}{h} = q + 1$, $\frac{x - x_{n-2}}{h} = \frac{x - x_n + 2h}{h} = q + 2$ и так далее....

Подставим эти значения в формулу (13), получим:

$$P_n(x) = y_n + q \frac{\Delta y_{n-1}}{1!} + q(q+1) \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!} + q(q+1)(q+2) \frac{\Delta^3 y_{n-3}}{3!} + \dots + q(q+1)\dots(q+n-1) \frac{\Delta^n y_0}{n!}. \quad (14)$$

Формула (14) и есть обычный вид второй интерполяционной формулы Ньютона.

4.6. Оценки погрешностей интерполяционных формул Ньютона

Если узлы интерполирования $x_0, x_1, \dots, x_n$ — равноотстоящие, причем

$$x_{i+1} - x_i = h, \quad i = 0, n-1,$$

то, полагая $q = \frac{x - x_0}{h}$, на основании оценки остаточного члена интерполяционной формулы Лагранжа, получим **остаточный член первой интерполяционной формулы Ньютона**:

$$R_n(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} \omega(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} h^{n+1} q(q-1)\dots(q-n),$$

где ξ — некоторое промежуточное значение между узлами интерполирования $x_0, x_1, \dots, x_n$ и рассматриваемой точкой x .

Аналогично, полагая $q = \frac{x - x_n}{h}$, получим **остаточный член второй интерполяционной формулы Ньютона**:

$$R_n(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} \omega(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} h^{n+1} q(q+1)\dots(q+n),$$

где ξ — некоторое промежуточное значение между узлами интерполирования $x_0, x_1, \dots, x_n$ и рассматриваемой точкой x .

Обычно при практических вычислениях интерполяционная формула Ньютона обрывается на членах, содержащих такие разности, которые в пределах заданной точности можно считать постоянными.

Предполагая, что $\Delta^{n+1}y$ почти постоянны для функции $y = f(x)$ и h — достаточно мало, и учитывая, что

$$f^{n+1}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta^{n+1} y_0}{h^{n+1}},$$

приближенно можно положить

$$f^{n+1}(\xi) = \frac{\Delta^{n+1} y_0}{h^{n+1}}.$$

В этом случае **остаточный член первой интерполяционной формулы Ньютона** приближенно равен

$$R_n(x) \approx \frac{q(q-1)\dots(q-n)}{(n+1)!} \Delta^{n+1} y_0.$$

В этих же условиях для остаточного члена **второй интерполяционной формулы Ньютона** получаем выражение:

$$R_n(x) \approx \frac{q(q+1)\dots(q+n)}{(n+1)!} \Delta^{n+1} y_0.$$

Замечание 3. Если максимальные разности практически постоянны, то результат интерполирования обыкновенно имеет столько верных десятичных знаков, сколько их есть в табличных данных, и поэтому оценка погрешности не обязательна. При пользовании интерполяционной формулой Лагранжа нет возможности следить за ходом конечных разностей, и поэтому следует, если это возможно, оценивать остаточный член.