7. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и известна ее первообразная $F(x)$, то определенный интеграл от этой функции в пределах от a до b может быть вычислен по формуле **Ньютона — Лейбница**:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \qquad (1) \qquad \text{где} \quad F'(x) = f(x).$$

Однако во многих случаях функция $F(x)$ не может быть найдена с помощью элементарных средств или является слишком сложной, вследствие этого вычисление определенного интеграла по формуле (1) может быть практически невыполнимым. Кроме того, на практике подынтегральная функция $f(x)$ часто задается таблично и тогда само понятие первообразной теряет смысл.

Поэтому особое значение приобретают численные (приближенные) методы вычисления определенных интегралов.

<u>Постановка задачи.</u>

*Задача численного интегрирования функции **f(x)** заключается в вычислении значения определенного интеграла на основании ряда значений подынтегральной функции $y_k = f(x_k)$.*

Идея численного интегрирования вытекает из **геометрического смысла** определенного интеграла – значение определенного интеграла численно равно **площади криволинейной трапеции**, ограниченной графиком функции ***y=f(x)***, осью абсцисс и прямыми ***x=a, x=b***. (рис 1)

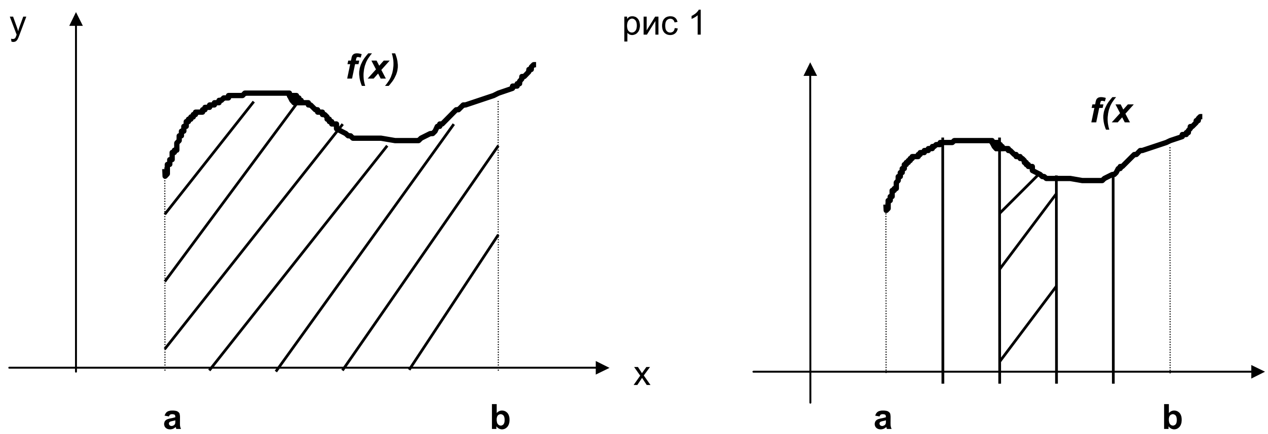


рис 1

Формально процедура численного интегрирования заключается в том, что отрезок **[a, b]** разбивается на **n** частичных отрезков, а затем подинтегральная функция заменяется легко интегрируемой функцией, интерполирующей значения подинтегральной функции в точках разбиения.

Наиболее часто приближенное значение интеграла ищут в виде линейной комбинации значений функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k). \qquad (2)$$

Приближенное равенство (2) называют ***квадратурной формулой***, определяемой узлами x_k и коэффициентами A_k.

Выражение в правой части (2) называют ***квадратурной суммой***, а разность $R_n(f) = \int\limits_a^b f(x)dx - \sum\limits_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$ остаточным членом, или остатком, квадратурной формулы.

Рассмотрим простейшие примеры численных методов интегрирования.

7.1. Метод прямоугольников

Составим интегральную сумму для функции ***f(x)*** на сегменте **[a,b]** .

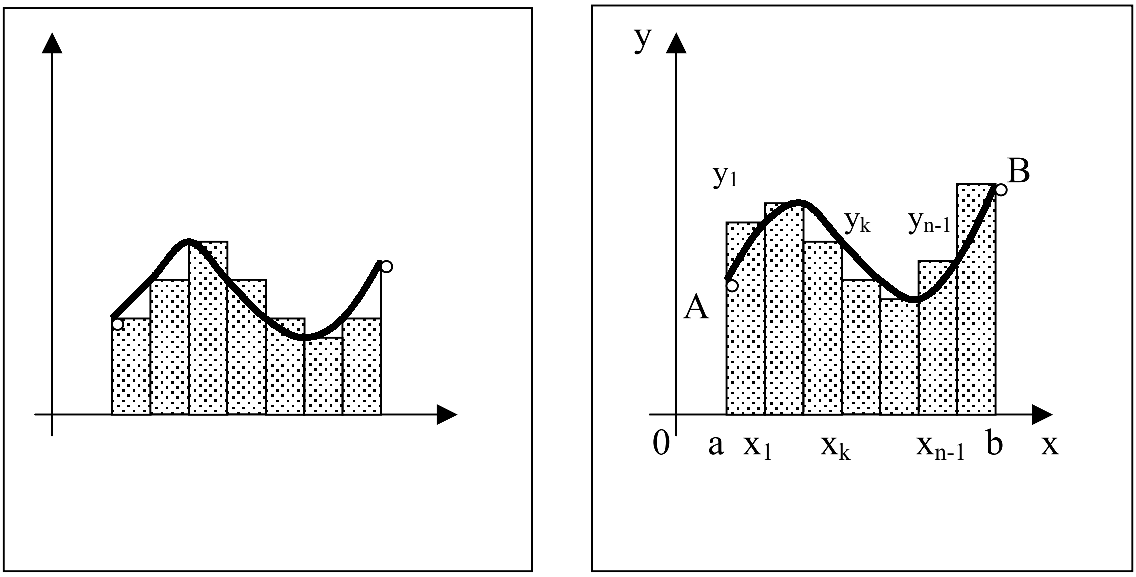
Для этого разобьем **[a,b]** на **n** равных частей точкками: $\boldsymbol{x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_{n-1}}$.

Длина каждой части равна $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$

Обозначим $y_k = f(a + k\Delta x)$ значение подынтегральной функции ***f(x)*** в узлах $x = x_k = a + k\Delta x$

$$\text{Составим суммы} \qquad \sum_{k=1}^{n} y_{k-1}\Delta x \quad и \quad \sum_{k=1}^{n} y_k \Delta x \qquad (3)$$

При составлении первой суммы мы рассматриваем значения функции ***y=f(x)*** в точках, являющихся левыми концами частичных сегментов (рис 2а), а при составлении второй суммы – в точках, являющихся правыми концами (рис 2б).



По определению интеграла:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} y_{k-1}\Delta x \quad \text{и} \quad \int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} y_k \Delta x$$

Поэтому в качестве приближенного значения интеграла естественно взять суммы

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} y_{k-1}\Delta x \quad \text{и} \quad \int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} y_k \Delta x \qquad (4)$$

т.е

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + y_2 + ... + y_{n-1}) \qquad (5)$$

и

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_1 + y_2 + y_3 + ... + y_n) \qquad (5')$$

Эти приближенные равенства называются **формулами прямоугольников**.

В случае, когда ***f(x)≥0***, они означают, что площадь криволинейной трапеции ***aABb***, ограниченной дугой кривой ***y=f(x)***, осью ***Ox*** и прямыми ***x=a*** и ***x=b***, принимается приближенно равной площади ступенчатой фигуры, образованной

из **n** прямоугольников с основаниями $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ и высотами $y_к$,

Всякое приближенное вычисление имеет определенную ценность лишь тогда, когда оно сопровождается оценкой допущенной при этом погрешности. Поэтому формулы прямоугольников будут практически пригодны для приближенного вычисления интегралов лишь в том случае, если будет существовать удобный способ оценки получающейся при этом погрешности (при заданном **n**), позволяющий к тому же находить и число частей **n** разбиения сегмента, гарантирующее требуемую степень точности приближенного вычисления.

Будем предполагать, что функция **f(x)** имеет ограниченную производную на сегменте **[a, b]**, так что существует такое число **M>0**, что для всех значений **x** из **[a, b]** выполняется неравенство **|f'(x)|** ≤ **M**. Качественный смысл этого неравенства заключается в том, что *скорость изменения значения функции ограничена*.
В реальных физических системах это требование практически всегда выполнено!

Тогда погрешность **Rn**, вычисления интеграла по формулам прямоугольников, может быть оценена по формуле:

$$|Rn| \le M(b-a)^2/2n \qquad (6)$$

При неограниченном возрастании **n** выражение $\boldsymbol{M(b-a)^2/2n}$, а следовательно, и погрешность $\boldsymbol{R_n}$ стремится к нулю, т.е. точность приближения будет тем больше, чем на большее число частей будет разделен сегмент **[a, b]**.

Следовательно, для вычисления интеграла с заданной точностью ε достаточно сегмент **[a, b]** разбить на число частей $\mathbf{n} = \boldsymbol{M(b-a)^2/2\varepsilon}$.

Метод прямоугольников – это наиболее простой и вместе с тем наиболее грубый метод приближенного интегрирования.

7.2. Метод трапеций

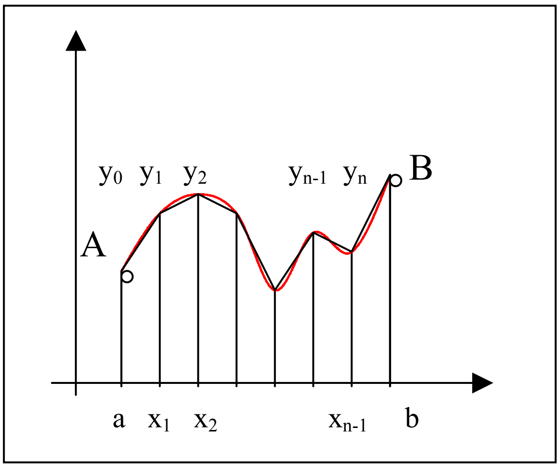
Очевидно, что чем больше число отрезков разбиения **n** , тем более точный результат дадут формулы (4 , 5). Однако увеличение числа разбиений интервала интегрирования не всегда возможно. Поэтому большой интерес представляют методы, дающие более точные результаты при том же числе точек разбиения.

Простейшая из таких формул получается как среднее арифметическое правых частей формул (4):

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n} \cdot \frac{\sum_{k=0}^{n-1} y_k + \sum_{k=0}^{n-1} y_{k+1}}{2} = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_k + y_{k+1}}{2} \qquad (7)$$

Легко усмотреть геометрический смысл этой формулы. Если на каждом отрезке разбиения дугу графика подинтегральной функции **y=f(x)** заменить стягивающей ее хордой (линейная интерполяция), то мы получим трапецию, площадь которой равна $\frac{b-a}{n} \cdot \frac{y_k + y_{k+1}}{2}$

Следовательно, формула (7) представляет собой площадь фигуры, состоящей из таких трапеций (рис. 3) .
Из геометрических соображений понятно, что площадь такой фигуры будет, вообще говоря, более точно выражать площадь криволинейной трапеции, нежели площадь ступенчатой фигуры, рассматриваемая в методе прямоугольников.



Приведя подобные, окончательно получим

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \cdot \left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right) \qquad (8)$$

Формулу (5) называют *формулой трапеций*.

Формулой трапеций часто пользуются для практических вычислений.

Для оценки погрешности ***R***R_n, возникающей при замене левой части (7) правой, доказывается, что абсолютная величина ее удовлетворяет неравенству:

$$|R_n| \le \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2 \qquad (9)$$

где M_2 – максимум модуля второй производной функции на отрезке [a,b], т.е.

$$M_2 = \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$$

Погрешность R_n будет меньше заданного числа $\varepsilon > 0$, если взять $n > \sqrt{\frac{M(b-a)}{12\varepsilon}}$

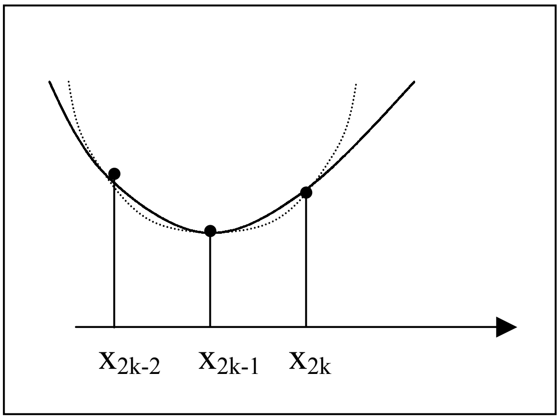
7.3. Метод парабол (Симпсона)

Значительное повышение точности приближенных формул может быть достигнуто за счет повышения порядка интерполяции. Одним из таких методов приближенного интегрирования является метод парабол.

Идея метода исходит из того, что на частичном промежутке дуга некоторой параболы в общем случае теснее прилегает к кривой **y=f(x)**, чем хорда, соединяющая концы дуги этой кривой, и поэтому значения площадей соответствующих элементарных трапеций, ограниченных «сверху» дугами парабол, являются более близкими к значениям площадей соответствующих частичных криволинейных трапеций, ограниченных сверху дугой кривой **y=f(x)**, чем значения площадей соответствующих прямолинейных трапеций.

Сущность метода состоит в следующем.

Отрезок **[a,b]** делится на **2n** равных частей.
Пусть точки деления
$x_0=a,\ x_1,\ x_2,\ \ldots x_{2n-2},\ x_{2n-1},\ x_{2n}=b$,
$y_0,\ y_1,\ \ldots y_{2n}$ – соответствующие значения подинтегральной функции.



Произведем квадратичную интерполяцию данной подинтегральной функции на каждом из отрезков разбиения, т.е. заменим дугу графика подинтегральной функции дугой параболы (рис.4).
Приведем без вывода формулу парабол в окончательном виде:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}\cdot\left[(y_0+y_{2n})+2(y_2+y_4+\ldots+y_{2n-2})+4(y_1+y_3+\ldots+y_{2n-1})\right]. \quad (10)$$

Если подинтегральная функция имеет на отрезке **[a,b]** непрерывную четвертую производную, то для поправочного члена формулы (10) оценка

$$|R_n| \le \frac{(b-a)^5}{180(2n)^4}M_4 \quad (11)$$

где $\mathbf{M_4}$- максимум модуля четвертой производной функции на отрезке **[a,b]**.

Сравнивая между собой оценки, замечаем, что с увеличением **n** погрешность формулы прямоугольников уменьшается пропорционально величине **n,**

формулы трапеций $\frac{1}{n^2}$, а формулы парабол – пропорционально величине $\frac{1}{n^4}$

Метод парабол сходится значительно быстрее метода трапеций, тогда как с точки зрения техники вычислений оба метода одинаковы.