8. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Многие задачи естествознания после соответствующих упрощений сводятся к решению уравнений, содержащих функции одного или нескольких аргументов, сами эти аргументы и производные различных порядков от искомых функций. Такие уравнения называются **дифференциальными**.

Дифференциальное уравнение, полученное в результате исследования какого-либо реального процесса или явления, называют дифференциальной моделью этого явления или процесса.

В зависимости от того, ставятся ли дополнительные условия в одной или нескольких точках отрезка изменения независимой переменной, задачи решения ОДУ обычно подразделяют на одноточечные (**задачи с начальными условиями или задачи Коши**) и многоточечные. Среди многоточечных задач наиболее часто на практике встречаются так называемые **граничные задачи**, когда дополнительные условия ставятся на концах рассматриваемого отрезка. Мы будем рассматривать модели, описываемые ***обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ).*** В них неизвестные функции зависят только от одной переменной.

8.0. Постановка задачи Коши

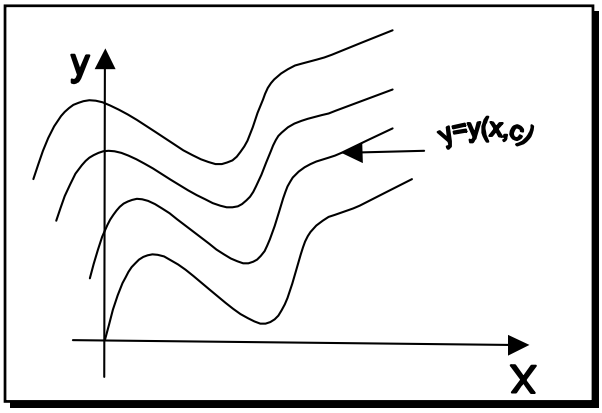
Обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида $$y' = f(x, y) \qquad (1)$$

Решением дифференциального уравнения является некоторая функция ***y(x)***, которая при подстановке в выражение обращает его в тождество.

Существует множество решений (так называемых частных решений) дифференциального уравнения (1), которые могут быть объединены и записаны в виде общего решения $$y = y(x, C), \qquad (2)$$

где ***C*** – произвольная постоянная.

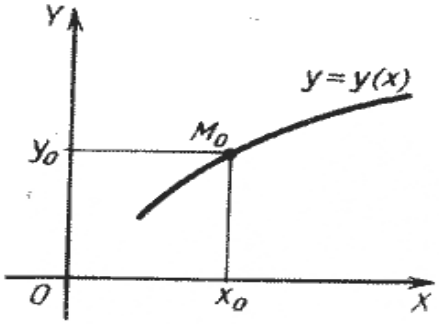
Геометрически это можно интерпретировать как семейство интегральных кривых, каждая из которых является графиком решения (1).



Для выбора одной кривой из семейства необходимо задать *начальные условия*

$$y(x_0) = y_0, \qquad (3)$$

то есть одну точку на искомой кривой.



Как правило, практическое значение имеет всегда частное решение ДУ.

Задача нахождения частного решения уравнения (1), соответствующего начальным условиям (3), называется ***задачей Коши.***

Итак, требуется решить задачу $\begin{cases} y' = f(x,y), \\ y(x_0) = y_{0,} \end{cases}$ (1*) где $x, x_0 \in [a,b]$.

Т.е. требуется найти интегральную кривую ***y = y(x),*** проходящую через заданную точку ***(x₀, y₀)*** при выполнении равенства ***y' = f(x,y)***.

Существование и единственность решения уравнения $y' = f(x,y)$ обеспечивается ***теоремой Пикара***.

Теорема. Если функция **f** определена и непрерывна в некоторой области **G**, определяемой неравенствами $|x - x_0| \le a$, $|y - y_0| \le b$ и удовлетворяет в этой области **условию Липшица** по **y**: $|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le M|y_1 - y_2|$, *то на некотором отрезке* $|x - x_0| \le h$, *где* ***h*** *— положительное число, существует и притом только одно решение задачи (1).*

Здесь ***M*** *— постоянная (константа Липшица), зависящая в общем случае от* ***a*** *и* ***b****.*
Если f(x,y) имеет ограниченную в G производную $f'_y(x,y)$,
то при $(x,y) \in G$ *можно принять* $M = \max |f'_y(x,y)|$.

Методы решения ОДУ

В классическом анализе разработано немало приемов нахождения решений дифференциальных уравнений через элементарные функции. Между тем при решении практических задач эти методы оказываются, как правило, либо совсем бесполезными, либо их решение связано с недопустимыми затратами усилий и времени. Для решения прикладных задач созданы методы приближенного решения дифференциальных уравнений, которые условно можно подразделить на три основные группы:

1. *Аналитические методы*, применение которых даст решение ОДУ в виде аналитической функции (метод Пикара);
2. *Графические методы*, дающие приближенное решение в виде графика (метод Эйлера);
3. *Численные методы*, когда искомая функция получается в виде таблицы (метод Рунге-Кутта).

Ниже рассматриваются некоторые методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка вида (1*).

Что же касается дифференциальных уравнений n-ого порядка:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \qquad (4)$$

для которых задача Коши состоит в нахождении решения ***y=y(x)***, удовлетворяющего начальным условиям

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \qquad (5)$$

где y_0, y_0',..., $y_0^{(n-1)}$ – заданные числа, то их можно свести к системе дифференциальных уравнений первого порядка.

Так, например, уравнение второго порядка $$y'' = f(x, y, y'), \qquad (6)$$ можно записать в виде системы двух уравнений первого порядка при помощи стандартной замены:

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = f(x, y, z) \end{cases} \qquad (7)$$

Методы решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений основываются на соответствующих методах решения одного уравнения

Очевидно, что ставить вопрос об отыскании приближенных значений интеграла или решения *y(x)* уравнения (1) можно в том и только в том случае, если решение *y(x),* удовлетворяющее условию (3), существует и единственно.

Как известно из теории дифференциальных уравнений, для этого достаточно, чтобы фигурирующая в правой части уравнения (1) функция ***f(x,y)*** была непрерывна в рассматриваемой области по обоим аргументам и имела ограниченную частную производную . f_y

Численное решение систем ОДУ

Метод Рунге-Кутта применяется также для приближенного решения *систем обыкновенных дифференциальных уравнений*. Пусть, например, дана система дифференциальных уравнений:

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}) \tag{11}$$

где $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ $\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{bmatrix}$ $\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$

Под решением системы (11) понимается любая совокупность функций ($y_1(x)$, $y_2(x)$,…,$y_n(x)$), которая, будучи подставлена в уравнение (11), обращает их в тождества. Так как система дифференциальных уравнений имеет бесчисленное множество решений, то для выделения одного конкретного решения $\mathbf{y} = \mathbf{y}(x)$, кроме уравнения, нужны дополнительные условия. В простейшем случае задаются начальные условия

$$\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}^{(0)} \tag{12}$$

что приводит к задаче Коши.

Задача Коши. Найти решение $\mathbf{y} = \mathbf{y}(x)$ системы (11), удовлетворяющее заданным начальным условиям (12), где x_0 - фиксированное значение независимой переменной и

$$\mathbf{y}^{(0)} = \begin{bmatrix} y_1^{(0)} \\ \vdots \\ y_n^{(0)} \end{bmatrix}$$

- данная система чисел.

Если x интерпретировать как время, а $y_1, \ldots, y_n$ - как обобщенные координаты некоторой механической системы, то получим следующий аспект задачи Коши: зная дифференциальные уравнения, управляющие механической системой, а также состояние ее в начальный момент времени x_0, определить состояние системы в любой момент времени x.

Задавшись некоторым шагом h и введя стандартные обозначения $x_i = x_0 + ih$ и $\mathbf{y}_i = \mathbf{y}_i(x)$, $\Delta\mathbf{y}_i = \mathbf{y}_{i+1} - \mathbf{y}_i$ при $i = 0,1,2,\ldots$, положим:

$$\begin{cases} k_1^{(0)} = hf(x_0, y_0), \\ k_2^{(0)} = hf(x_0 + \dfrac{h}{2}, y_0 + \dfrac{k_1^{(0)}}{2}), \\ k_3^{(0)} = hf(x_0 + \dfrac{h}{2}, y_0 + \dfrac{k_2^{(0)}}{2}), \\ k_4^{(0)} = hf(x_0 + \dfrac{h}{2}, y_0 + k_3^{(0)}) \end{cases} \tag{13}$$

Согласно методу Рунге-Кутта $\Delta \boldsymbol{y}_0$ приближенно определяют по формуле

$$\Delta \mathbf{y}_0 = \frac{1}{6}(k_1^{(0)} + 2k_2^{(0)} + 2k_3^{(0)} + k_4^{(0)}), \tag{14}$$

отсюда

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_0 + \Delta \mathbf{y}_0 .$$

Далее, приняв $(x_1, \boldsymbol{y}_1)$ за исходные данные и повторяя тот же процесс, находим $\boldsymbol{y}_2$. Аналогично вычисляются

$\boldsymbol{y}_i$ (i=3,4,5,…).

Более подробно с методами решений систем уравнений можно познакомиться в [13].