

8.1. Метод ломаных Эйлера

В основе метода ломаных Эйлера лежит идея *графического построения* решения дифференциального уравнения. Этот метод дает одновременно и способ нахождения искомой функции в численной (табличной) форме.

Идея метода заключается в том, что на малом промежутке изменения независимой переменной $x_0 \leq x \leq x_0 + h = x_1$

интегральная кривая дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ заменяется отрезком прямой (касательной) $y - y_0 = f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0)$ (8)

Отсюда $y_1 = y_0 + f(x_0, y_0) \cdot h$

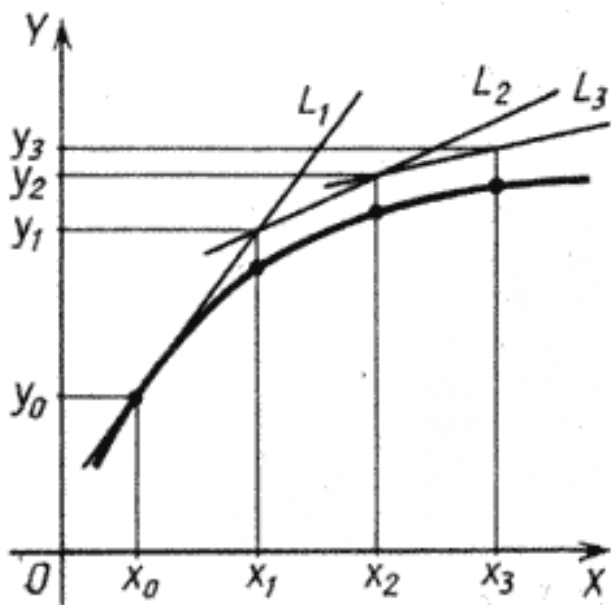
и процесс можно повторить для промежутка $x_1 \leq x \leq x_1 + h = x_2$ и т.д.

Таким образом, интегральная кривая заменяется при этом ломаной, называемой *ломаной Эйлера* (рис.).

Рассмотрим задачу (1), где $f(x, y)$ — непрерывно дифференцируемая функция в прямоугольнике $D = \{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$, $x_0 \in [a, b]$.

Построим систему равноотстоящих узлов $x_0, x_1, \dots, x_n$,

где $x_k = x_0 + kh$, $k = 0, 1, 2, \dots$, h — достаточно малый шаг интегрирования.



Проведем касательную в точке (x_0, y_0) к графику решения $y = y(x)$ дифференциального уравнения (1) с угловым коэффициентом $k_0 = y'(x_0, y_0)$.

Уравнение этой касательной имеет вид: $y = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0)$.

За приближенное решение уравнения $y' = f(x, y)$ в точке x_1 возьмем ординату y_1 точки пересечения касательной с прямой $x = x_1$, т. е.

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0)$$

или $y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$.

Через точку (x_1, y_1) проведем прямую с угловым коэффициентом $k_1 = y'(x_1)$, где y_1 определен только что выше: $y = y_1 + f(x_1, y_1)(x - x_1)$.

Находим точку пересечения полученной прямой с прямой $x = x_2$, ордината этой точки: $y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)(x_2 - x_1)$,

или $y_2 = y_0 + hf(x_1, y_1)$.

Продолжая этот процесс, получаем семейство отрезков прямых:

$$y = y_k + f(x_k, y_k)(x - x_k),$$

$$y_k = y_{k-1} + hf(x_{k-1}, y_{k-1}), \quad (9)$$

где $x \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \dots$

Эти отрезки образуют ломаную, называемую **ломаной Эйлера**. Она является приближенным решением исходной задачи (1) методом ломаных Эйлера.

Метод Эйлера обладает удовлетворительной точностью лишь при достаточно малых h . Действительно, разложим точное решение уравнения (1) в ряд Тейлора в окрестности узла x_k :

$$y(x_k + h) = y(x_k) + y'(x_k)h + O(h^2) = y(x_k) + hf(x_k, y_k) + O(h^2).$$

Сравнив полученное выражение с формулой (9), приходим к выводу, что *погрешность приближенного метода Эйлера* $O(h^2)$.

Отметим, что особенностью метода Эйлера является то, что на каждом шаге интегрирования приближенное значение $y(x_k)$ определяется через $y(x_{k-1})$.

Таким образом, на каждом отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ решается задача Коши:

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_{k-1}) = y_{k-1}, \quad k=1, 2, \dots, \end{cases}$$

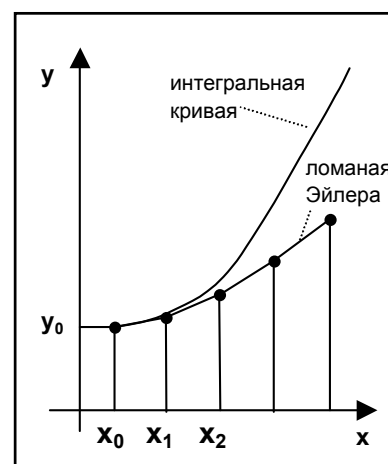
что удобно с точки зрения вычислений.

Метод Эйлера является простейшим численным методом интегрирования дифференциального уравнения.

Его недостатки:

- 1) малая точность;
- 2) систематическое накопление ошибок: погрешность каждого нового шага систематически возрастает.

Существуют различные уточнения метода Эйлера, повышающие его точность



8.2. Модификации метода Эйлера

Более точным является **усовершенствованный метод Эйлера**, при котором сначала вычисляют промежуточные значения:

$$x_{k+\frac{1}{2}} = x_k + \frac{h}{2} \quad y_{k+\frac{1}{2}} = y_k + \frac{h}{2} f(x_k, y_k),$$

а затем полагают

$$y_{k+1} = y_k + hf\left(x_{k+\frac{1}{2}}, y_{k+\frac{1}{2}}\right). \quad (10)$$

Получим оценку точности построенного метода. Для этого разложим точное решение (1) в ряд Тейлора в окрестности точки $x_{k+\frac{1}{2}}$, получим:

$$y(x_k) = y\left(x_k + \frac{h}{2}\right) - \frac{h}{2} y'\left(x_k + \frac{h}{2}\right) + \frac{h^2}{4} y''\left(x_k + \frac{h}{2}\right) + O(h^3),$$

$$y(x_k + h) = y\left(x_k + \frac{h}{2}\right) + \frac{h}{2} y'\left(x_k + \frac{h}{2}\right) + \frac{h^2}{4} y''\left(x_k + \frac{h}{2}\right) + O(h^3),$$

отсюда

$$y(x_k + h) - y(x_k) = hy'\left(x_k + \frac{h}{2}\right) + O(h^3)$$

или

$$y(x_k + h) = y(x_k) + hy'\left(x_k + \frac{h}{2}\right) + O(h^3),$$

а это значит

$$y(x_k + h) = y(x_k) + hf\left(x_{k+\frac{1}{2}}, y_{k+\frac{1}{2}}\right) + O(h^3).$$

Сравнив полученную формулу с (10), получим *погрешность* $O(h^3)$.

Другой модификацией метода Эйлера является **усовершенствованный метод Эйлера — Коши**, при котором сначала определяется «грубое» приближение решения:

$$\tilde{y}_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k).$$

Исходя из данного выражения, вычисляют:

$$\tilde{f}_{k+1} = f(x_{k+1}, \tilde{y}_{k+1}).$$

Затем приближенно полагают

$$y_{k+1} = y_k + h \frac{f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, \tilde{y}_{k+1})}{2}. \quad (11)$$

Усовершенствованный метод Эйлера — Коши можно еще более уточнить, применяя **итерационную обработку** каждого значения y_k . А именно, исходя из грубого приближения

$$y_{k+1}^{(0)} = y_k + hf(x_k, y_k),$$

строится итерационный процесс

$$y_{k+1}^{(i)} = y_k + \frac{h}{2} \left[f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1}^{(i)}) \right], \quad (12)$$

Итерации продолжаются до тех пор, пока некоторые два последовательных приближения $y_{k+1}^{(m)}$ и $y_{k+1}^{(m+1)}$ станут меньше заданной погрешности.

После этого принимается

$$y_{k+1} \approx \bar{y}_{k+1}^{(m)},$$

где $\bar{y}_{k+1}^{(m)}$ — общая часть приближений $y_{k+1}^{(m)}$ и $y_{k+1}^{(m+1)}$.

Отметим, что метод Эйлера с итерационной обработкой дает на каждом шаге погрешность порядка h^3 и нередко применяется в вычислительной практике.

8.3. Метод Рунге — Кутта

Этот метод является одним из методов повышенной точности и относится к одношаговым методам численного интегрирования задачи Коши (1), т. е. к таким методам, которые позволяют найти приближенное значение решения заданной задачи в узле x_{i+1} по информации об этом решении лишь в одной предыдущей узловой точке x_i .

Метод Рунге — Кутта является одним из самых распространенных методов решения задач с начальными условиями для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Метод описывается следующими шестью соотношениями:

$$\begin{aligned}y_{i+1} &= y_i + \Delta y_i, & \Delta y_i &= \frac{1}{6}(K_1^{(i)} + 2K_2^{(i)} + 2K_3^{(i)} + K_4^{(i)}), \\K_1^{(i)} &= hf(x_i, y_i), & K_2^{(i)} &= hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_1^{(i)}}{2}), \\K_3^{(i)} &= hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_2^{(i)}}{2}), & K_4^{(i)} &= hf(x_i + h, y_i + K_3^{(i)}).\end{aligned}$$

Как видно, с алгоритмической точки зрения метод Рунге — Кутта не имеет принципиальных различий от метода Эйлера. Разница лишь в объеме вычислений: для получения нового значения y на каждом шаге необходимо проделать все действия, предусмотренные формулами выше.

Метод Рунге — Кутта является методом повышенной точности (он имеет четвертый порядок точности), несмотря на свою трудоемкость широко используется при численном решении уравнений с помощью компьютера.

На практике применяется следующий способ контроля точности — двойной счет. Если y_{2h} — вычисленное значение $y(x)$ с шагом $2h$, а y_h — соответствующее узловое значение, полученное с шагом h , то для ориентировочной оценки погрешности ε последнего значения y_h можно использовать формулу:

$$\varepsilon \approx \frac{|y_{2h} - y_h|}{15}.$$