8.3. Методы Рунге-Кутты

Метод Эйлера и метод Эйлера-Коши относятся к семейству методов Рунге-Кутты.

Рассмотрим **схемы Рунге-Кутты**.

Положим $$y(x+h) \approx y(x) + \sum_{i=1}^{q} p_i k_i(h) = z(h) \qquad (1)$$

Где коэффициенты ***k*** вычисляются последовательно по схеме:

$$k_1(h) = h \cdot f(x, y),$$

$$k_2(h) = h \cdot f(x + \alpha_2 \cdot h, y + \beta_{21} k_1(h)),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$k_q(h) = h \cdot f(x + \alpha_q h, y + \beta_{q1} k_1(h) + \ldots + \beta_{qq-1} k_{q-1}(h))$$

Рассмотрим вопрос о выборе параметров $\alpha_i, p_i, \beta_{ij}$:

$$\alpha_2, \ldots, \alpha_q;\ p_1, \ldots, p_q;\ \beta_{ij}, 0 < j < i \le q$$

Обозначим $\varphi(h) = y(x+h) - z(h).$

Предположим, что

$\varphi(0) = \varphi'(0) = \ldots = \varphi^{(s)}(0) = 0$ при любых функциях $f(x, y)$,

а $\varphi^{(s+1)}(0) \neq 0$ для некоторой функции $f(x, y)$.

По формуле Тэйлора справедливо равенство (где $0 < \theta < 1$)

$$\varphi(h) = \sum_{i=0}^{s} \frac{\varphi^{(i)}(0)}{i!} h^i + \frac{\varphi^{(s+1)}(\theta h)}{(s+1)!} h^{s+1}, \qquad (2)$$

Величина $\varphi(h)$ называется **погрешностью метода на шаге**, а s–**порядком погрешности метода**.

При $q = 1$ будем иметь:

$$\varphi(h) = y(x+h) - y(x) - p_1 \cdot h \cdot f(x, y),$$

$$\varphi(0) = 0,$$

$$\varphi'(0) = (y'(x+h) - p_1 f(x, y))|_{h=0} = f(x, y)(1 - p_1),$$

$$\varphi''(h) = y''(x+h).$$

Равенство $\varphi'(0)=0$ выполняется для любых функций $f(x,y)$ лишь при условии, что $p_1=1$. При этом p_1 из (1) получается

$$\triangle y_k = hf(x_k, y_k),$$
$$y_{k+1} = y_k + \triangle y_k,\ k=0,1,2,\dots\ .$$

т.е. . **метод Эйлера**

Для погрешности этого метода на шаге согласно (2) будем иметь:

$$\varphi(h)=\frac{\varphi''(x+\theta h)\cdot h^2}{2}.$$

Рассмотрим случай $q=2$, тогда

$$\varphi(h)=y(x+h)-y(h)-p_1hf(x,y)-p_2hf(\overline{x},\overline{y}),$$

где $\overline{x}=x+\alpha_2 h,\ \ \overline{y}=y+\beta_{21}hf(x,y)$.

Согласно исходному дифференциальному уравнению

$$y=f,\ y''=f_x+f_yf,\ y'''=f_{xx}+2f_{xy}f+f_{yy}f^2+f_yy''. \qquad (3)$$

Здесь для краткости через y и f обозначены $y(x)$ и $f(x,y)$ соответственно.

Вычисляя производные функции $\varphi(h)$ и подставляя в выражения для $\varphi(h), \varphi'(h)\ и\ \varphi''(h)$ значение $h=0$, получим (с учетом соотношений (3)):

$$\varphi(0)=0,$$
$$\varphi'(0)=(1-p_1-p_2)f,$$
$$\varphi''(0)=(1-2p_2\alpha_2)f_x+(1-2p_2\beta_{21})f_yf$$

Требование $\varphi(0)=\varphi'(0)=\varphi''(0)=0$ будет выполняться для всех $f(x,y)$ лишь в том случае, если одновременно будут справедливы следующие три равенства относительно четырех параметров:

$$\begin{aligned}&1-p_1-p_2=0,\\ &1-2p_2\alpha_2=0,\\ &1-2p_2\beta_{21}=0.\end{aligned} \qquad (4)$$

Задавая значение одного из параметров и определяя значения остальных из системы (4), мы будем получать *различные методы Рунге-Кутты* с порядком погрешности $s=2$.

Например при $p_1 = \dfrac{1}{2}$ из (4) получаем: $p \; = \dfrac{1}{2}, \alpha_2 = 1, \; \beta_{21} = 1.$

Формула (4) примет вид: $\quad y_{i+1} = y_i + h \cdot \dfrac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y^*{}_{i+1})}{2}.$

Здесь y_{i+1} записано вместо $y(x+h)$, y_i - вместо $y(x)$, а через $y^*{}_{i+1}$ обозначено выражение $y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$.

Таким образом, в рассматриваемом случае мы приходим к формулам, соответствующим методу Эйлера-Коши.

$$y^*{}_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i),$$
$$y_{i+1} = y_i + h \cdot \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y^*{}_{i+1})}{2},$$

Из (2) следует, что главная часть погрешности на шаге равна $\dfrac{\varphi'''(0)}{6} h^3$, т.е. пропорциональна третьей степени шага h.

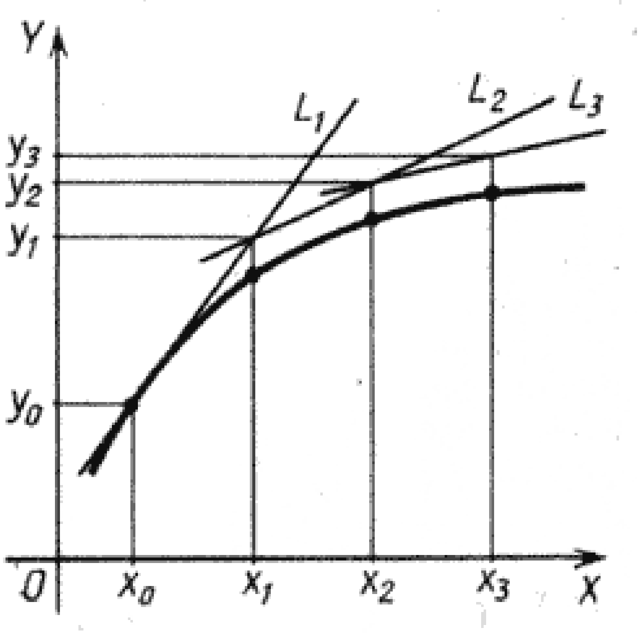
В вычислительной практике наиболее часто используется метод Рунге-Кутты четвертого порядка с $q = 4$ и $s = 4$.

Один из вариантов соответствующих расчетных формул (без вывода):

$$
\begin{aligned}
& k_1 = h \cdot f(x, y), \\
& k_2 = h \cdot f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_1}{2}\right), \\
& k_3 = h \cdot f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_2}{2}\right), \qquad\qquad (5) \\
& k_4 = h \cdot f(x + h, y + k_3), \\
& \vartriangle y = z(h) - y(x) = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).
\end{aligned}
$$

Отметим, что в этом случае погрешность на шаге пропорциональна пятой степени шага (h^5).

Отсюда, в частности, следует, что при достаточно малом h и малых погрешностях вычислений решение уравнения $y' = f(x, y)$, полученное методом Рунге-Куттыпо формулам (5), будет близким к точному.



Геометрический смысл использования метода Рунге-Кутты 4-го порядка с расчетными формулами (5) состоит в следующем.

Из точки (x_i, y_i) сдвигаются в направлении, определяемом углом α_1, для которого $tg\alpha_1 = f(x_i, y_i)$. На этом направлении выбирается точка с координатами $(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2})$.

Затем из точки (x_i, y_i) сдвигаются в направлении, определяемом углом α_2, для которого $tg\alpha_2 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_1}{2})$, и на этом направлении выбирается точка с координатами $(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2})$.

Наконец, из точки (x_i, y_i) сдвигаются в направлении, определяемом углом α_3,для которого $tg\alpha_3 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2})$ и на этом направлении выбирается точка с координатами $(x_i + h, y_i + k_3)$. Этим задается еще одно направление, определяемое углом α_4, для которого $tg\alpha_4 = f(x_i + h, y_i + k_3)$.

Четыре полученные направления усредняются в соответствии с последней из формул (5). На этом окончательном направлении и выбирается очередная точка $(x_{i+1}, y_{i+1}) = (x_i + h, y_i + \vartriangle y)$.