Работа 3.15

Изучение затухающих электромагнитных колебаний в колебательном контуре

Оборудование: панель с конденсаторами и катушкой индуктивности, магазин сопротивлений, электронный осциллограф, звуковой генератор, соединительные провода.

Введение

Цепь, содержащая последовательно соединенные *индуктивность* L, *емкость* C и *сопротивление* R (рис. 3.53), называется *колебательным контуром*.

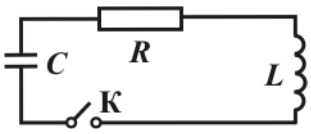

Рис. 3.53

Если зарядить конденсатор до напряжения U и замкнуть ключ *K*, начнется разряд конденсатора на сопротивление R и индуктивность L. Изменение тока разряда в цепи приведет к возникновению *ЭДС самоиндукции*:

$$\mathcal{E}_{\text{c}} = -L\frac{di}{dt}.$$

Если считать ток *квазистационарным*, согласно второму правилу Кирхгофа можно записать:

$$-L\frac{di}{dt} = Ri + U$$

или

$$L\frac{di}{dt} + Ri + U = 0. \quad (1)$$

Учитывая, что $i = \frac{dq}{dt}$, $q = CU$, получим:

$$\frac{d^2U}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dU}{dt} + \frac{U}{LC} = 0. \quad (2)$$

Обозначим $\frac{R}{L} = 2\beta$ и $\frac{1}{LC} = \omega_0^2$, тогда вместо (2) будем иметь:

$$\frac{d^2U}{dt^2} + 2\beta\frac{dU}{dt} + \omega_0^2 U = 0. \quad (3)$$

Для решения уравнения (3) произведем замену переменной:

$$U = Ze^{-\beta t}. \quad (4)$$

Если выражение (4) дважды продифференцировать по времени и подставить в (3), то получим:

$$\frac{d^2Z}{dt^2}+(\omega_0^2-\beta^2)Z=0 \tag{5}$$

или

$$\frac{d^2Z}{dt^2}+\omega^2 Z=0\,, \tag{6}$$

где

$$\omega^2=\omega_0^2-\beta^2\,. \tag{7}$$

Решение уравнения (6) зависит от соотношений между коэффициентами ω_0^2 и β^2. Если $\omega^2>0$ (это значит, $\omega_0^2>\beta^2$), то решение имеет вид:

$$U=U_0e^{-\beta t}\sin\left(\omega t-\varphi_0\right), \tag{8}$$

где постоянные U_0 и φ_0 зависят от начальных условий.

Из решения (8) следует, что напряжение на обкладках конденсатора изменяется периодически, но амплитуда колебаний не остается постоянной, а со временем изменяется по *экспоненциальному закону*:

$$A=U_0e^{-\beta t}\,, \tag{9}$$

где U_0 — напряжение на конденсаторе (при $t=0$).

Таким образом, колебания напряжения на конденсаторе являются затухающими. График затухающих колебаний приведен на рис. 3.54.

Период затухающих колебаний зависит от сопротивления контура:

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}=\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}}\,. \tag{10}$$

Если сопротивление очень мало по сравнению с L, то $\frac{R^2}{4L^2}\approx 0$ и период незатухающих колебаний будет равен:

$$T_0=2\pi\sqrt{LC}\,. \tag{11}$$

Затухающие колебания характеризуются не только *коэффициентом затухания* $\beta=\frac{R}{2L}$, но и *логарифмическим декрементом затухания* θ, который равен натуральному логарифму отношения амплитуд, которые отстают друг от друга во времени на период

$$\theta=\ln\frac{U_0e^{-\beta t}}{U_0e^{-\beta(t+T)}}=\beta T=\frac{R}{2L}T\,. \tag{12}$$

Из формулы (12) видно, что чем меньше R и больше L, тем меньше затухание и период колебаний T ближе к T_0, определенному по формуле (11). При увеличении R затухание колебаний и их период увеличиваются. Из формулы (10) следует, что при $\omega_0^2 \le \beta^2$, т. е. $\frac{1}{LC} \le \frac{R^2}{4L^2}$ или $R \ge 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, свободные колебания в контуре не возникают. Сопротивление контура

$$R_k = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \tag{13}$$

называется критическим сопротивлением.

Если сопротивление $R >> R_k$, то разряд конденсатора носит апериодический характер (рис. 3.55).

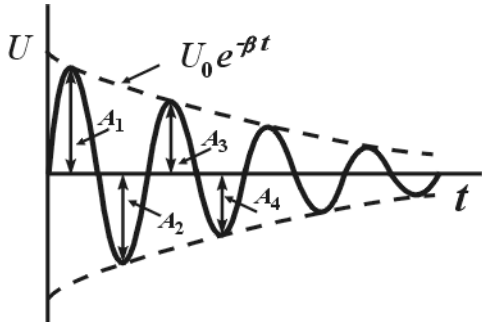

Рис. 3.54

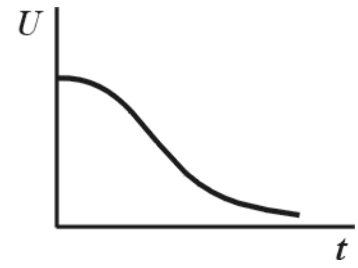

Рис. 3.55

Процесс изменения напряжения на обкладках конденсатора колебательного контура можно наблюдать на экране осциллографа, если пластины конденсатора подключить к его вертикальному входу. Однако при использовании обыкновенного осциллографа с малым послесвечением экрана требуется периодическое воспроизведение изучаемого процесса. Для этого колебательный контур возбуждается короткими импульсами напряжения, следующими друг за другом через равные промежутки времени. Частота этих импульсов должна быть значительно меньше, чем собственная частота колебаний контура, а их длительность значительно меньше, чем период колебаний. При выполнении этих условий на экране осциллографа будет наблюдаться достаточно большое количество полных колебаний. Если измерить амплитуды колебаний A_1 и A_3, A_2 и A_4 (рис. 3.54) и т. д., то можно определить логарифмический декремент затухания:

$$\theta = \ln\frac{A_1}{A_3} = \ln\frac{A_2}{A_4} = \ln\frac{A_{n-2}}{A_n}.$$

Однако измерения будут более точными, если измерять не A_1, A_2, A_3 и т. д., а $A_1 + A_2$, $A_3 + A_4$ и т. д.

В этом случае

$$\theta = \ln\frac{A_1 + A_2}{A_3 + A_4}. \tag{14}$$

Действительно, из выражения $\theta = \ln\left(A_1/A_3\right)$ следует: $A_1/A_3 = e^{\theta}$, откуда $A_1 = A_3 e^{\theta}$. Аналогично $A_2 = A_4 e^{\theta}$, поэтому $A_1 + A_2 = \left(A_3 + A_4\right)e^{\theta}$, откуда

$$\theta = \ln\frac{A_1 + A_2}{A_3 + A_4}.$$

В том случае, если затухание невелико ($\beta^2 << \omega_0^2$), в формулу (12) вместо периода затухающих колебаний T можно подставить:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{LC},$$

тогда

$$\theta = \frac{R}{2L}T_0 = \frac{R}{2L}2\pi\sqrt{LC} = \pi R\sqrt{\frac{C}{L}}. \qquad (15)$$

Таким образом, при малом затухании логарифмический декремент затухания пропорционален сопротивлению контура R.

Если построить график $\theta = f\left(R\right)$, то по тангенсу угла наклона прямой α можно при известной емкости C контура определить его индуктивность

$$L = \frac{\pi^2 C}{\mathrm{tg}^2\,\alpha}. \qquad (16)$$

С помощью осциллографа можно определить период затухающих колебаний. Для этого на вертикальный вход осциллографа необходимо подать синусоидальное напряжение с известной частотой f_1 и определить продолжительность горизонтальной развертки:

$$t = n_1 T_1 = \frac{n_1}{f_1},$$

где n_1 — число полных синусоидальных колебаний, которые укладываются на экране осциллографа, $T_1 = 1/f_1$ — их период.

Если за то же время развертки t на экране укладывается n полных затухающих колебаний периода T, то $nT = n_1 T_1$, откуда

$$T = \frac{n_1}{n}T_1 = \frac{n_1}{n f_1}. \qquad (17)$$

Описание установки и метода. Конденсатор C и катушка индуктивности L, закрепленные на подставке, вместе с магазином сопротивления R образуют колебательный контур.

Возбуждение колебаний в колебательном контуре осуществляется импульсами постоянного напряжения, которые возникают на зажимах генератора развертки осциллографа при обратном ходе электронного луча. Эти импульсы в колебательный контур поступают через конденсатор C_1.

Переменное напряжение, возникающее на обкладках конденсатора колебательного контура C, подается на вертикальный вход осциллографа. Схема подключения колебательного контура к осциллографу представлена на рис. 3.56. Для измерения периода колебаний используется звуковой генератор. Измерение амплитуды колебаний выполняется с помощью масштабной сетки, расположенной на экране осциллографа.

Порядок выполнения работы

1. Соберите схему согласно рис. 3.56. Включите осциллограф в сеть 220 В.

2. Установите переключатели на панели осциллографа «Развертка» в положение 150 Гц, «Синхронизация» — в положение «Внешн.».

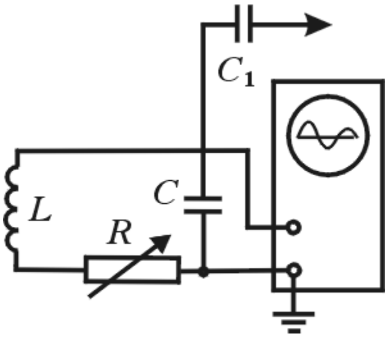

Рис. 3.56

3. Установите сопротивление магазина R равным нулю. С помощью ручек управления осциллографа «Усиление X», «Усиление Y», «Развертка плавно» добейтесь, чтобы на экране осциллографа уложилась целиком вся картина затухающих колебаний.

4. Измерьте амплитуды колебаний. Измерения выполняйте в центре экрана, для этого каждый раз смещайте по горизонтали картину затухающих колебаний с помощью ручки «Смещение луча по горизонтали».

5. Определите логарифмический декремент затухания по формуле (14). Результаты измерений и расчетов запишите в таблицу:

№ п/п	R, Ом	$A_1 + A_2$, мм	$A_3 + A_4$, мм	θ	L, Гн

6. Выполните аналогичные измерения и расчеты для других значений сопротивления R. Для этого последовательно увеличивайте сопротивление магазина R на 100 Ом от нуля до 800 Ом.

7. Используя магазин сопротивлений, найдите критическое сопротивление, при котором колебания переходят в апериодический разряд конденсатора. Сравните найденное значение R_k с рассчитанным по формуле (13), при этом необходимо учесть сопротивление катушки индуктивности R_0, значение которого указано на установке.

8. Постройте график зависимости логарифмического декремента затухания от сопротивления контура, определите тангенс угла наклона прямой и по формуле (16) индуктивность катушки L.

9. Определите период затухающих колебаний. Для этого подсчитайте, сколько полных затухающих колебаний n уместилось на экране осциллографа. Отключите колебательный контур, а на вход осциллографа подайте напряжение

10 В от низкоомного выхода (5 Ом) звукового генератора, переключатель «Синхронизация» установите в положение «Внутр.». Изменяйте частоту колебаний генератора, пока на экране не разместятся 10 — 20 полных колебаний. По шкале генератора определите частоту колебаний f_1. Подсчитайте n_1 и вычислите период затухающих колебаний по формуле (17).

10. Сравните найденное значение T с вычисленным по формуле (11).

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что называют электромагнитными колебаниями? Приведите примеры.
2. Чем вызвано затухание колебаний в контуре?
3. Запишите уравнение электромагнитных колебаний, возникающих в идеальном колебательном контуре.
4. Какими параметрами контура определяется коэффициент затухания?
5. Каков смысл логарифмического декремента затухания?
6. Почему частота возбуждающих импульсов должна быть меньше частоты собственных колебаний контура?
7. Почему продолжительность возбуждающих импульсов должна быть меньше периода собственных колебаний контура?
8. При каком условии процесс разрядки конденсатора колебательного контура является апериодическим?
9. Выведите уравнение затухающих колебаний и запишите его решение.
10. В каком случае логарифмический декремент затухания прямо пропорционален сопротивлению контура?