Лекция 11
Работа и мощность постоянного тока. Разветвленные электрические цепи

Вопросы. *Работа и мощность постоянного тока. Закон Джоуля–Ленца. Дифференциальная форма закона Джоуля–Ленца. Разветвленные цепи. Правила Кирхгофа.*

11.1. Работа и мощность постоянного тока. Закон Джоуля–Ленца

При прохождении электрического тока в цепи за время dt через каждое сечение любого проводника, включенного в эту цепь, переносится заряд $dq = I\,dt$ (I – сила тока в цепи). Силы электростатического поля и сторонние силы, если они есть на выбранном участке, совершают работу

$$dA = U\,dq = UI\,dt\,,$$

где U – разность потенциалов между началом и концом выбранного участка цепи. За конечный промежуток времени t совершается работа

$$A = \int_0^t U\,dq = UI\int_0^t dt = UIt\,. \tag{11.1}$$

Величина, выраженная формулой (11.1), называется работой постоянного тока. Как и любая работа, она измеряется в джоулях:

$$\left[A\right] = 1\,\text{Äæ} = 1\,\text{Â·À·ñ}\,.$$

Разделив работу на время, за которое она совершается, получим выражение для мощности, развиваемую током на рассматриваемом участке цепи:

$$P = \frac{A}{t} = UI\,. \tag{11.2}$$

$$\left[P\right] = 1\,\text{Âò} = 1\,\text{Â·À}\,.$$

Эта мощность в общем случае расходуется на совершение рассматриваемым участком цепи механической работы над внешними телами (если участок перемещается в пространстве; см. работу электродвигателя), на протекание химических реакций и на нагревание самого участка цепи.

В проводниках первого рода, к которым относятся в первую очередь, все металлы, если они неподвижны, механическая работа не выполняется, и химические процессы не происходят. Следовательно, вся работа электрического тока расходуется на выделение теплоты в проводнике, т. е. на его нагревание. В рамках классической физики объяснить это можно тем, что строение металла можно представить, как кристаллическую решетку, состоящую из положительных ионов. Свободные электроны, которые движутся в электрическом поле, сталкиваются с узлами этих решеток и отдают им свою энергию, нагревая проводник. Выделяющаяся в проводнике теплота определяется соотношением (11.1):

$$Q = UIt. \tag{11.2}$$

Выражение (11.2), используя закон Ома, можно представить в виде:

$$Q = UIt = IR^2t = \frac{U^2}{R}t. \tag{11.3}$$

Выражение (11.3) называют законом Джоуля–Ленца в интегральной форме, который был установлен в 1841 г. независимо английским ученым Дж. Джоулем (1818–1889) и русским ученым Э.Х. Ленцем (1804–1865).

Введем понятие *удельной тепловой мощности*, которое можно определить, как количество теплоты, выделившееся в единице объема проводника за единицу времени:

$$\omega = \frac{\Delta Q}{\Delta V \, \Delta t}.$$

Учитывая (11.3), (10.8) и то, что объем проводника $\Delta V = S\,\Delta l$, получим:

$$\omega = \frac{I^2\rho\,\Delta l\,\Delta t}{SS\,\Delta l\,\Delta t} = \frac{I^2}{S^2}\rho = j^2\rho, \tag{11.4}$$

где $j = \dfrac{I}{S}$ – плотность тока; ρ – удельное сопротивление проводника. Используя закон Ома в дифференциальной форме $j = \sigma E$ и связь удельной проводимости и удельного сопротивления проводника $\rho = \dfrac{1}{\sigma}$, получим математическое выражение для закона Джоуля–Ленца в дифференциальной форме:

$$\omega = \sigma^2E^2\frac{1}{\sigma} = \sigma E^2. \tag{11.5}$$

11.2. Разветвленные цепи. Правила Кирхгофа

На практике часто приходится рассчитывать разветвленные электрические цепи. Такие разветвленные цепи могут содержать в принципе произвольное количество замкнутых контуров. Расчеты всегда можно выполнить с помощью закона Ома. Однако их можно значительно упростить, если использовать правила, сформулированные немецким физиком Кирхгофом (1824–1887). Этих правил два.

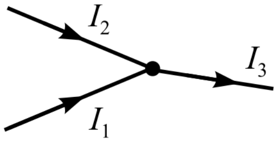

Рис. 11.1

Первое правило Кирхгофа. Чтобы его сформулировать, необходимо ввести понятие узла. Узлом называется точка, в которой сходятся три и более проводника (рис. 11.1).

Само правило является следствием закона сохранения заряда и условия, которое накладывается на узел (узел не может накапливать заряды): ***алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю***:

$$\sum_{i=1}^{n} I_i = 0. \qquad (11.6)$$

При расчетах цепей уравнений типа (11.6) записывается на одно меньше, чем насчитывается узлов в цепи. Если число уравнений соответствует числу узлов, то одно из них является следствием из всех остальных, что только загромождает расчеты. Токи, входящие в узел, считаются положительными, а вытекающие – отрицательными. Последний постулат всегда необходимо помнить при выполнении расчетов.

Второе правило Кирхгофа. ***В любом замкнутом контуре разветвленной электрической цепи алгебраическая сумма ЭДС, действующих в этом контуре, равна сумме произведений токов в каждой его ветви на их сопротивления.***

$$\sum_{i=1}^{n} \mathcal{E}_i = \sum_{i=1}^{n} I_i R_i, \qquad (11.7)$$

где n – число участков, на которые контур разбивается узлами.

Для доказательства рассмотрим замкнутый контур, состоящий из четырех участков (рис. 11.2).

Здесь $R_{12} = R_1$, $R_{23} = R_2$, $R_{34} = R_3$, $R_{41} = R_4$ – полные сопротивления участков *1–2*, *2–3*, *3–4*, *4–1*, которые включают в себя и внутренние сопротивления, включенных в схему источников ЭДС. Согласно закону Ома (10.8), (10.17) для каждого из участков можно записать:

$$I_1 R_1 = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{1_1};$$

$$I_2 R_2 = \varphi_2 - \varphi_3 + \mathcal{E}_{2_1};$$

$$I_3 R_3 = \varphi_3 - \varphi_4 + \mathcal{E}_{3_1};$$

$$I_4 R_4 = \varphi_4 - \varphi_{1_1}.$$

Сложив почленно эти уравнения, получим:

$$I_1 R_1 + I_2 R_2 + I_3 R_3 + I_4 R_4 = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3.$$

Выражение (11.7) для замкнутого контора, состоящего из четырех ветвей, доказано. Очевидно, что данное утверждение справедливо для любого количества ветвей, если цепь замкнута. Уравнение, согласно (11.7) можно составить для любого, мысленно выделенного замкнутого контура, в любой разветвленной цепи. Однако независимыми будут уравнения только для тех контуров, которые нельзя получить наложением друг на друга.

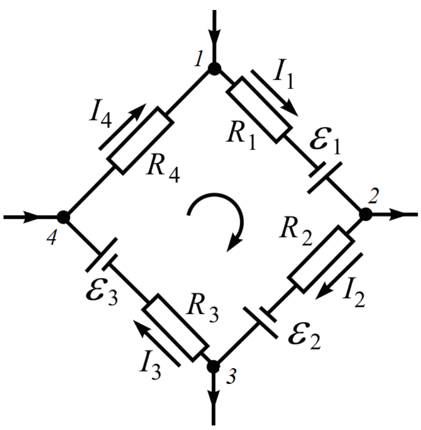

Рис. 11.2

Схема применения правил Кирхгофа:

1. На всех без исключения участках цепи стрелками показываем направление тока, которое выбираем произвольно. Если после проведения расчетов значение силы тока окажется отрицательным, то это означает, что на самом деле ток течет в сторону противоположную, указанной на схеме;

2. Записываем уравнение (11.6) согласно первому правилу для всех узлов, имеющихся в рассматриваемой цепи, кроме одного. Токи, которые входят в узел, считаем положительными, а которые выходят – отрицательными;

3. Произвольно выбираем направление обхода контуров. В целях минимизации ошибок при расчетах лучше условиться за направление обхода брать направление движения часовой стрелки;

4. Для всех независимых контуров записываем уравнение (11.7) согласно второму правилу. На тех участках цепи, где выбранное направление обхода совпадает с выбранным направлением тока, произведение IR считаем положительным, а на тех, где не совпадает – отрицательным. Те ЭДС, которые повышают потенциал в направлении обхода, считаем положительными, а которые понижают – отрицательными;

5. Решаем систему уравнений, составленную согласно пунктам 2 и 4.

11.3. Примеры применения правил Кирхгофа

Параллельное соединение проводников. В цепи на рис. 11.3 два сопротивления (r_1, r_2) соединены параллельно. Согласно схеме применения правил Кирхгофа:

1. Укажем направление токов на всех участках.

2. В цепи имеется два узла (a, b). Согласно (11.6) достаточно составить одно уравнение, скажем, для узла a: $I - I_1 - I_2 = 0$.

3. Направление обхода всех контуров выбираем по часовой стрелке.

4. Для двух независимых контуров ar_2br_1a и $ar_1b\mathcal{E}a$ согласно (11.7) записываем уравнения:

$$I_2r_2 - I_1r_1 = 0,$$

$$I_1r_1 + Ir = \mathcal{E}.$$

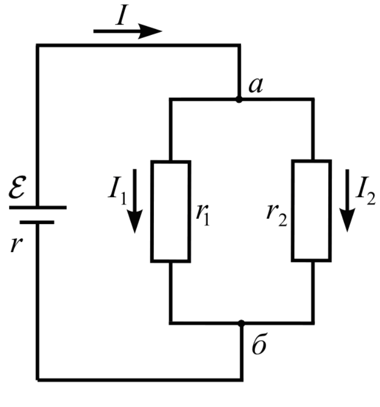

Рис. 11.3

5. Решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} I - I_1 - I_2 = 0, \\ I_1r_1 + Ir = \mathcal{E}, \\ I_2r_2 - I_1r_1 = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения выразим I_1 и подставим в третье:

$$-Ir_1 + I_2r_1 + I_2r_2 = 0,$$

или

$$I_2\left(r_1 + r_2\right) = Ir_1 .$$

Из последнего уравнения получим:

$$\frac{I_2}{I} = \frac{r_1}{r_1 + r_2}. \qquad (11.8)$$

Проделав ту же операцию для I_2, получим:

$$\frac{I_1}{I} = \frac{r_2}{r_1 + r_2}. \qquad (11.9)$$

Из двух последних равенств следует:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2}{r_1}.$$

Отношение сил токов в двух проводниках, соединенных параллельно, обратно отношению их сопротивлений.

Из (11.9) выразим I_1 и подставим во второе уравнение системы:

$$I\left(r + \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}\right) = \mathcal{E} .$$

Если сравнить последнее выражение с законом Ома для замкнутой цепи (10.18), то общее сопротивление внешнего участка цепи, т. е. общее сопротивление двух соединенных параллельно проводников равно:

$$R = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}.$$

Из последнего уравнения не составляет труда получить:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}. \qquad (11.10)$$

Для *n* проводников, соединенных параллельно:

$$\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r_i}. \qquad (11.11)$$

Шунт. Сопротивление, включаемое в электрическую цепь параллельно амперметру с целью увеличения максимально измеряемой данным прибором силы тока, называют *шунтом*. А само включение этого сопротивления называют *шунтированием прибора*. Схема включения шунта показана на рис. 11.4. Согласно (11.9) сила тока в цепи

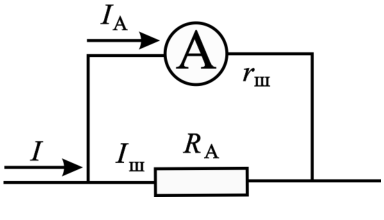

Рис. 11.4

$$I = I_{\text{À}} \frac{r_{\text{ø}} + r_{\text{À}}}{r_{\text{ø}}},$$

где $r_{\text{À}}$ – сопротивление амперметра; $r_{\text{ø}}$ – сопротивление шунта.

Если измеряемая сила тока в *n* раз превышает максимальную величину силы тока, измеряемую данным амперметром, т. е. $I = nI_{\text{А}}$, то

$$nI_{\text{А}} = I_{\text{А}} \frac{r_{\text{ø}} + r_{\text{А}}}{r_{\text{ø}}}, \text{ или } nr_{\text{ø}} = r_{\text{ø}} + r_{\text{А}}, \text{ или } (n-1) r_{\text{ø}} = r_{\text{А}},$$

или

$$r_{\text{ø}} = \frac{r_{\text{А}}}{n-1}. \tag{11.12}$$

Формулой (11.12) пользуются при расчете шунтов для увеличении пределов измерения амперметров.

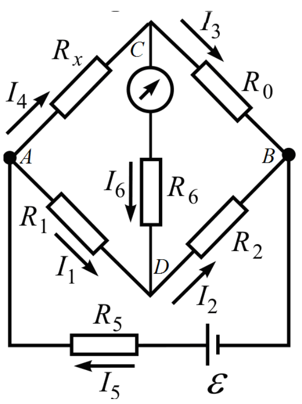

Рис. 11.5

Мостик Уитстона. Схема мостика представлена на рис. 11.5.

Она используется для сравнения некоторого неизвестного сопротивления R_x с известным сопротивлением R_0. В мостике имеются четыре точки разветвления: *A*, *B*, *C*, *D* между которыми включены четыре сопротивления R_1, R_2, R_x, R_0, называемые плечами мостика. В одну из его диагоналей *AB* включен источник ЭДС и сопротивление R_5, а во вторую *CD* – гальванометр и сопротивление R_6. Применим схему решения к мостику. Причем в ходе решения выразим неизвестное сопротивление R_x.

1. Укажем направление токов на всех участках мостика.

2. В схеме имеется четыре узла (*A*, *B*, *C*, *D*). Согласно (11.6) достаточно составить три уравнение, скажем, для узлов *A*, *C*, *D*:

$$\begin{cases} I_5 - I_4 - I_1 = 0, \\ I_4 - I_3 - I_6 = 0, \\ I_1 + I_6 - I_2 = 0. \end{cases} \tag{11.13}$$

3. Направление обхода всех контуров выбираем по часовой стрелке.

4. Для трех независимых контуров *ACDA*, *CBDC* и $ADB\mathcal{E}R_5A$ согласно (11.7) записываем уравнения:

$$\begin{cases} I_4R_x + I_6R_6 - I_1R_1 = 0, \\ I_3R_0 - I_2R_2 - I_6R_6 = 0, \\ I_1R_1 + I_2R_2 + I_5R_5 = \mathcal{E}. \end{cases} \tag{11.14}$$

5. Решая уравнения (11.13) совместно с уравнениями (11.14) можно определить все токи I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6. Однако на практике мостики изготавливаются таким образом, что за счет изменения сопротивлений R_1 и R_2 добиваются состояния, когда через гальванометр ток не идет. Это означает, что

потенциалы в узлах C и D равны между собой. В таком случае из (11.13) следует, что $I_1 = I_2$, $I_3 = I_4$,

а из (1.14) следует, что $I_1 R_1 = I_4 R_x$, $I_2 R_2 = I_3 R_0$. Откуда

$$\frac{R_x}{R_0} = \frac{R_1}{R_2} \text{ и } R_x = R_0 \frac{R_1}{R_2}. \qquad (11.15)$$

Последнее выражение и применяется для определения неизвестных сопротивлений. Промышленностью выпускаются разные приборы для измерения неизвестных сопротивлений проводников, в основе которых лежит мостовая схема. Поскольку в расчетную формулу не входит значение ЭДС источника, могут быть схемы, работающие как на источниках переменного тока, так и на источниках постоянного тока.