Лекция 26

Закон Ома для цепи переменного тока

Вопросы. *Индуктивность и емкость в цепи переменного тока. Метод векторных диаграмм. Закон Ома для цепи переменного тока. Резонанс в последовательной и параллельной цепях.*

26.1. Индуктивность в цепи переменного тока

В цепи переменного тока, которая содержит катушку индуктивности (рис. 26.1) под воздействием приложенного напряжения проходит переменный ток

$$I = I_0 \sin \omega t, \tag{26.1}$$

который согласно формуле (22.3) создает переменный магнитный поток

$$\Phi = LI_0 \sin \omega t. \tag{26.2}$$

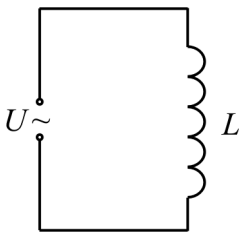

Рис. 26.1

Этот поток в свою очередь создает в цепи ЭДС самоиндукции, мгновенное значение которой, согласно выражению (22.4) равно

$$\mathcal{E}_{\text{с}} = -L\frac{dI}{dt} = -LI'(t).$$

Если активное сопротивление цепи равно нулю, то согласно закону Ома для полной цепи

$$\mathcal{E}_{\text{ñ}} + U = 0,$$

где U – мгновенное значение напряжения источника переменного тока, включенного в цепь. Поэтому

$$U = -\mathcal{E}_{\text{ñ}} = LI'(t). \tag{26.3}$$

Если в формулу (26.3) подставить значение силы тока (26.1), получим:

$$U = L\left(I_0 \sin \omega t\right)' = I_0 \omega L \cos \omega t, \tag{26.4}$$

где

$$I_0 \omega L = U_0 - \tag{26.5}$$

амплитудное значение напряжения.

Поскольку

$$\cos \omega t = \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right),$$

то выражение (26.4) для мгновенного значения напряжения примет вид:

$$U = U_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right). \tag{26.6}$$

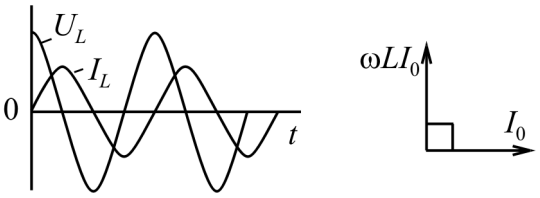

Рис. 26.2

Таким образом, колебания напряжения на катушке индуктивности, включенной в цепь переменного тока, опережают по фазе силу тока в катушке на $\frac{\pi}{2}$ (рис. 26.2). Из-за этого средняя мощность, которую потребляет катушка, равна нулю. Это обусловлено тем, что при увеличении силы тока энергия от источника «запасается» в катушке магнитным полем, а если сила тока и созданное им магнитное поле уменьшаются, энергия возвращается к источнику.

По закону Ома для участка цепи $I_0 = \frac{U_0}{X_L}$. С учетом выражения (26.5) получим $X_L = \omega L$. Величина

$$X_L = \omega L \tag{26.7}$$

называется *индуктивным сопротивлением*.

26.2. Емкость в цепи переменного тока

Если в цепь переменного тока с напряжением $U = U_0 \sin \omega t$ включен конденсатор (рис. 26.3), то мгновенное значение заряда на его обкладках равно $q = CU = CU_0 \sin \omega t$. В результате периодической перезарядки конденсатора в цепи возникает переменный электрический ток, мгновенное значение которого равно первой производной от заряда по времени:

$$I = q'(t) = \left(CU_0 \sin \omega t\right)' = CU_0 \omega \cos \omega t, \tag{26.8}$$

где

$$CU_0 \omega = I_0 \; - \tag{26.9}$$

амплитудное значение силы тока в цепи. С учетом этого

$$I = I_0 \cos \omega t, \tag{26.10}$$

или

$$I = I_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right). \tag{26.11}$$

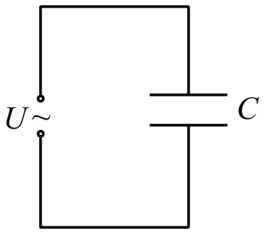

Рис. 26.3

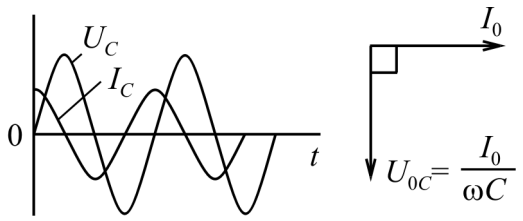

Рис. 26.4

Из формулы (26.11) следует, что в цепи переменного тока с конденсатором колебания силы тока опережают по фазе колебания напряжения на $\frac{\pi}{2}$ (рис. 26.4).

Из формулы (26.9) выразим отношение $\frac{U_0}{I_0}$:

$$\frac{U_0}{I_0} = \frac{1}{\omega C}.$$

Величину

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \tag{26.12}$$

называют *емкостным сопротивлением*.

По закону Ома $I_0 = \frac{U_0}{X_C}$, или $I_{\text{ä}} = \frac{U_{\text{ä}}}{X_C}$.

Сдвиг фаз между колебаниями силы тока и колебаниями напряжения в цепи переменного тока с конденсатором обусловлены тем, что напряжение на конденсаторе в любой момент времени определяется зарядом конденсатора, накопленным на его обкладках на предыдущей стадии колебаний. Так, например, в момент времени $t_0 = 0$ (рис. 26.4), когда напряжение начинает расти, заряд на обкладках конденсатора равен нулю и носители тока свободно движутся к обкладкам, поэтому ток максимален. Когда же напряжение приближается к максимальному значению, то заряд, накопленный на обкладках, препятствует притоку носителей к ним и сила тока уменьшается до нуля. Таким образом, конденсатор, включенный в цепь переменного тока, препятствует упорядоченному движению носителей тока, поскольку на его обкладках запасается заряд. В результате того, что колебания силы тока и колебания напряжения смещены по фазе на $\frac{\pi}{2}$, среднее значение мощности, которую потребляет от источника переменного тока конденсатор, равно нулю. В первую и третью четверти периода конденсатор заряжается,

и энергия источника превращается в энергию электростатического поля конденсатора, где и запасается, а во вторую и четвертую четверти периода конденсатор разряжается, и энергия его электростатического поля возвращается к источнику тока. Потерь энергии при этом не происходит.

Следует заметить, что вышеизложенное справедливо для «идеальных» конденсатора и катушки индуктивности.

26.3. Закон Ома для цепи переменного тока

Рассмотрим цепь переменного тока, состоящую из резистора сопротивлением *R*, конденсатора емкостью *C* и катушки индуктивностью *L*, соединенных последовательно (рис. 26.5).

Мгновенные значения силы тока на всех элементах этой цепи одинаковы, а мгновенное значение напряжения между концами цепи равно алгебраической сумме мгновенных значений напряжений на резисторе – U_R, конденсаторе – U_C и катушке индуктивности – U_L.

Для того чтобы определить амплитудные (или действующие) значения напряжения и силы тока, а также сдвиг фаз между ними удобно воспользоваться методом векторных диаграмм. В этом методе амплитудные или действующие значения всех напряжений и токов рассматриваются как векторы, вращающиеся с угловой скоростью ω, равной циклической частоте переменного тока, а их мгновенные значения определяются проекциями этих векторов на некоторую, обычно горизонтальную ось. Так как сила тока в цепи одинакова, то строить векторную диаграмму начнем с вектора $\vec{I}_0$, модуль которого равен амплитудному значению силы тока в цепи. Направление этого вектора может быть любым. Направим его под углом $\alpha = \omega t$ к горизонтали (рис. 26.6).

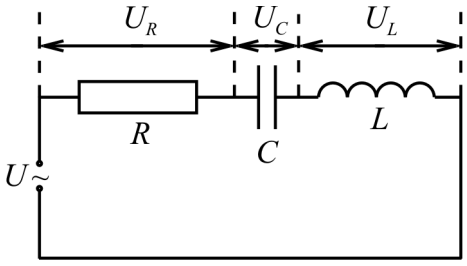

Рис. 26.5

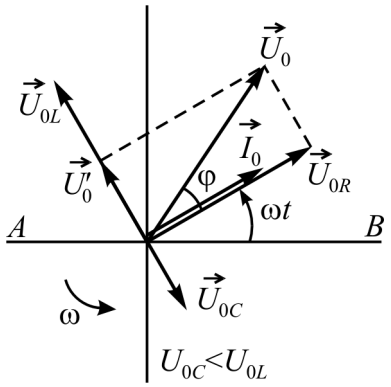

Рис. 26.6

Колебания напряжения на активном сопротивлении совпадают по фазе с колебаниями силы тока, поэтому вектор $\vec{U}_{0R}$, модуль которого равен $U_{0R} = I_0 R$, совпадает по направлению с вектором $\vec{I}_0$. Сдвиг фаз между колебаниями силы тока и колебаниями напряжения на индуктивном сопротивлении составляет $\frac{\pi}{2}$, причем ток отстает

по фазе от напряжения. Поэтому вектор $\vec{U}_{0L}$, модуль которого равен $U_{0L} = I_0 \omega L$, нужно повернуть относительно вектора $\vec{I}_0$ на угол $\frac{\pi}{2}$ против часовой стрелки. И наконец, вектор $\vec{U}_{0C}$, модуль которого равен $\frac{I_0}{\omega C}$, отстает по фазе от вектора $\vec{I}_0$ на $\frac{\pi}{2}$, поэтому его нужно повернуть на этот угол по часовой стрелке.

Для того чтобы найти напряжение на зажимах цепи, надо сложить три вектора: $\vec{U}_0 = \vec{U}_{0R} + \vec{U}_{0L} + \vec{U}_{0C}$. Удобно сначала сложить векторы $\vec{U}_{0R}$ и $\vec{U}_{0C}$. Модуль этой суммы $U_0' = \left|\vec{U}_{0R} + \vec{U}_{0C}\right|$. Пусть $\omega L > \frac{1}{\omega C}$, тогда

$$U_0' = I_0\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right).$$

После этого складывают векторы $\vec{U}_{0R}$ и $\vec{U}_0'$. Модуль вектора $\vec{U}_0$ определяется по теореме Пифагора:

$$U_0^2 = U_{0R}^2 + \left(U_{0L} - U_{0C}\right)^2, \text{ или } U_0^2 = I_0^2 R^2 + I_0^2\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2,$$

откуда амплитудное значение силы тока в цепи:

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{U_0}{Z}, \qquad (26.13)$$

где Z – полное сопротивление (импеданс) цепи, R – его активное сопротивление, $\omega L - \frac{1}{\omega C}$ – реактивное сопротивление цепи переменного тока.

Таким образом, амплитудное (действующее) значение силы тока в цепи переменного тока равно отношению амплитудного (действующего) значения напряжения на концах этой цепи к его полному сопротивлению. Последнее утверждение называют *законом Ома для цепи переменного тока*.

Сдвиг фаз между силой тока и напряжением равен углу φ между векторами $\vec{U}_0$ и $\vec{I}_0$. В соответствии с рис. 26.6 ток отстает от напряжения на угол φ, причем

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \qquad (26.14)$$

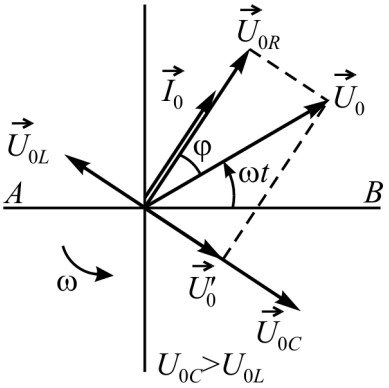

Рис. 26.7

Для того чтобы определить мгновенные значения напряжений на активном, емкостном и индуктивном сопротивлениях, необходимо спроектировать векторы $\vec{U}_{0R}$, $\vec{U}_{0L}$, $\vec{U}_{0C}$ на прямую *AB*. Тогда

$$U_R = I_0 R \sin(\omega t + \varphi), \tag{26.15}$$

$$U_L = I_0 \omega L \sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right), \tag{26.16}$$

$$U_C = \frac{I_0}{\omega C} \sin\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right). \tag{26.17}$$

Отметим, что, если $\frac{1}{\omega C} > \omega L$, то тогда

$$U_0' = I_0\left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right),$$

а

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\frac{1}{\omega C} - \omega L}{R},$$

причем ток опережает напряжение по фазе на угол φ (рис. 26.7).

26.4. Резонанс в последовательной и параллельной цепи

Из выражения (26.13) закона Ома следует, что сила тока в последовательной RLC-цепи переменного тока (рис. 26.5) зависит от частоты колебаний ω и достигает максимального значения, когда реактивное сопротивление цепи равно нулю. Частоту ω_0, при которой амплитуда тока достигает максимального значения, называют собственной частотой колебаний. Тогда $\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0$, откуда

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \tag{26.18}$$

Рассмотренное явление называется *резонансом напряжений*. При резонансе, как следует из формулы (26.13), максимальное значение силы тока зависит только от активного сопротивления цепи:

$$I_{\max} = \frac{U}{R}.$$

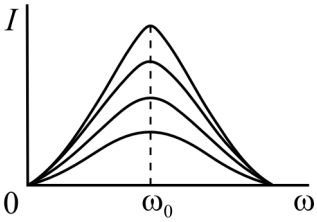

Рис. 26.8

При этом напряжение на конденсаторе

$$U_C = \frac{I_{\max}}{\omega_0 C} = I_{\max}\sqrt{\frac{L}{C}},$$

а напряжение на катушке индуктивности

$$U_L = I_{\max} U_0 L = I_{\max}\sqrt{\frac{L}{C}},$$

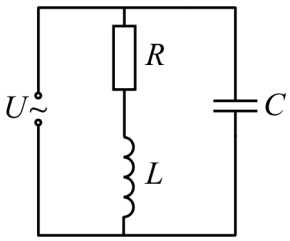

Рис. 26.9

откуда следует, что при резонансе напряжения на конденсаторе и катушке индуктивности равны. Однако, поскольку эти напряжения смещены относительно друг друга на π, то полное напряжение на емкости и индуктивности равно нулю в любой момент времени, а напряжение источника тока при резонансе равно напряжению на активном сопротивлении. При этом колебания силы тока и напряжения совпадают по фазе, а мощность, потребляемая цепью от источника тока, максимальна. Мощность источника при резонансе выделяется только на активном сопротивлении *R*. Зависимость силы тока от его частоты в последовательной цепи переменного тока показана на рис. 26.8.

Рассмотрим цепь переменного тока содержащую конденсатор емкостью *C*, параллельно соединенный с катушкой индуктивностью *L* и активным сопротивлением *R* (рис. 26.9).

Обе ветви цепи находятся под одинаковым напряжением *U*. Емкостное сопротивление $X_C = \frac{1}{\omega C}$ соединено параллельно с сопротивлением $X = R + \omega L$, поэтому общее сопротивление цепи

$$Z = \frac{X_C X}{X_C + X} = \frac{\left(R + \omega L\right)\frac{1}{\omega C}}{R + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}. \qquad (26.19)$$

Рассмотрим случай, когда сопротивление катушки *R* ничтожно мало по сравнению с ее индуктивным сопротивлением $R \ll X_L$. Тогда общее сопротивление равно:

$$Z = \frac{L}{C}\frac{1}{R + \left(X_L - X_C\right)} = \frac{L}{C}\frac{1}{R + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}. \qquad (26.20)$$

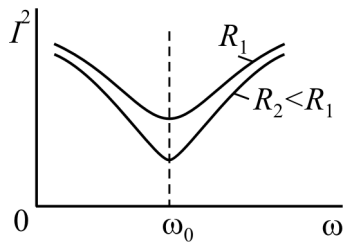

Рис. 26.10

При выполнении условия резонанса

$$X_L = X_C;\ \omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

а общее сопротивление равно:

$$Z = \frac{L}{CR}. \qquad (26.21)$$

Общий ток в цепи при этом

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{URC}{L} \qquad (26.22)$$

минимален и равен активной составляющей тока.

Этот случай называют *резонансом токов*, так как силы токов в ветвях незначительно отличаются по модулю. При этом происходит обмен энергией между катушкой и конденсатором, а источник тока только компенсирует потери в активном сопротивлении.