Лекция 28
Электромагнитные колебания

Вопросы. *Электромагнитный колебательный контур. Незатухающие колебания. Формула Томсона. Затухающие колебания. Вынужденные колебания в контуре. Резонанс. Добротность и полоса пропускания контура. Электрические автоколебания. Автогенераторы.*

28.1. Электромагнитный колебательный контур

Электромагнитными колебаниями называют периодические изменения заряда, тока, напряжения и связанных с ними напряженности электрического и индукции магнитного полей в электрических цепях. Если все эти величины изменяются по закону синуса или косинуса, то такие колебания называют *гармоническими*. Электрическая цепь, в которой могут существовать электромагнитные колебания, называется *электромагнитным колебательным контуром*. Простейший электромагнитный колебательный контур представляет собой последовательно соединенные конденсатор емкостью C и катушку индуктивностью L (рис. 28.1).

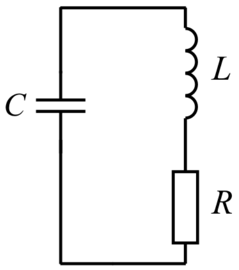

Рис. 28.1

Соединительные провода, а также провод катушки обладают определенным сопротивлением R, которое называют активным сопротивлением контура.

В зависимости от типа колебательной системы различают три основных вида колебаний: свободные или собственные колебания, вынужденные колебания, автоколебания.

Свободные, или собственные, колебания – это колебания, происходящие в замкнутой консервативной колебательной системе, которую вывели из состояния устойчивого равновесия и оставили «один на один», т. е. без воздействия извне. Реальные колебательные системы являются неконсервативными, поэтому собственные колебания в таких системах всегда затухают. Такие колебания называют *затухающими*.

Если на неконсервативную колебательную систему воздействует внешний источник энергии, которая периодически передает ей определенные порции энергии, то в системе возникают *вынужденные колебания*.

Автоколебательной называют неконсервативную физическую систему, в которой при отсутствии внешних периодических воздействий, могут возникнуть и существовать незатухающие периодические колебания. Такие колебания называют *автоколебаниями.*

28.2. Незатухающие колебания

Если колебательному контуру сообщить определенный запас энергии и сразу отключить источник, то в нем возникнут электромагнитные колебания. Это можно осуществить, если зарядить конденсатор до определенного напряжения или создать ток в катушке. В первом случае энергия вносится в контур в виде энергии электростатического поля заряженного конденсатора, а во втором – в виде энергии магнитного поля катушки с током. Причем в любой момент времени полная энергия электромагнитного поля контура представляет сумму энергии электростатического поля конденсатора и энергии магнитного поля катушки, т. е.

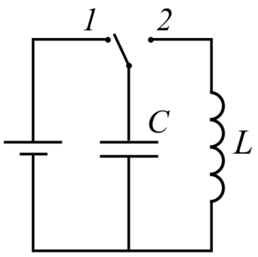

Рис. 28.2

$$W = \frac{q^2}{2C} + \frac{LI^2}{2}, \tag{28.1}$$

где I и q – мгновенные значения тока в катушке и заряда на обкладках конденсатора.

Пусть активное сопротивление колебательного контура равно нулю (такой контур называют *идеальным*).

Зарядим конденсатор идеального контура (рис. 28.2) от источника тока, замкнув переключатель в положение *1*. Конденсатор приобретет заряд q_0 при напряжении между обкладками U_0 (рис. 28.3, *а*), а его энергия будет равна

$$W = \frac{CU_0^2}{2} = \frac{q_0^2}{2C}. \tag{28.2}$$

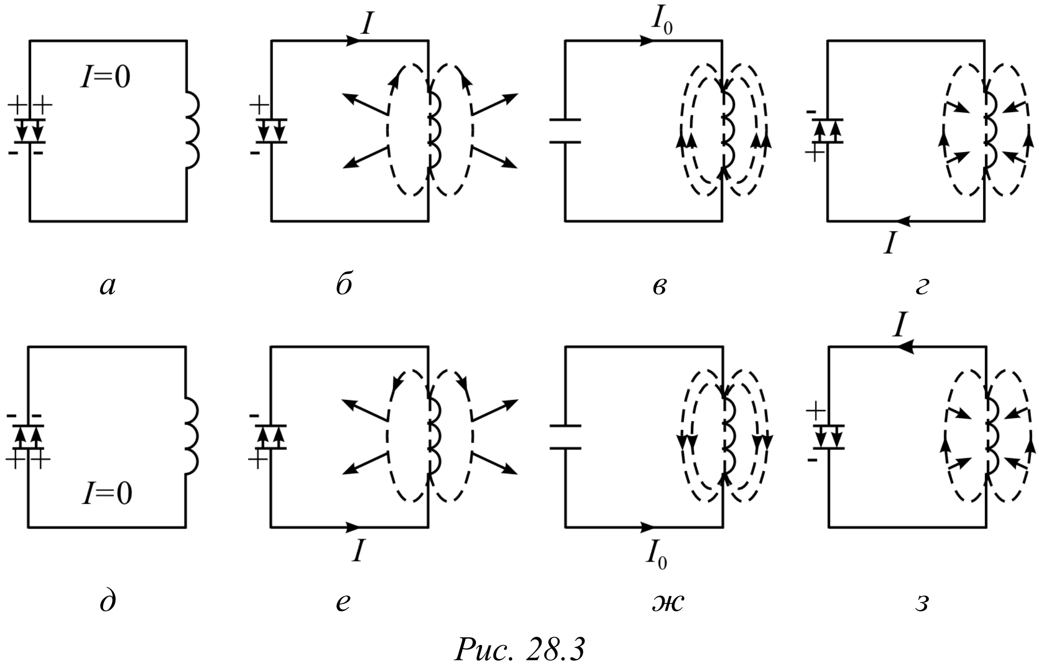

Рис. 28.3

Если затем замкнуть переключатель в положение *2*, то конденсатор начнет разряжаться через катушку, причем разрядный ток будет возрастать. Мгновенный разряд конденсатора невозможен, потому что при возрастании тока возрастает и созданное им магнитное поле. Это приводит к появлению в контуре ЭДС самоиндукции и индукционного тока, направленного в соответствии с правилом Ленца, навстречу разрядному току (рис. 28.3, *б*). В процессе разрядки конденсатора энергия электрического поля уменьшается, но одновременно возрастает энергия магнитного поля тока, которая согласно формуле (22.10) равна

$$W = \frac{LI^2}{2}.$$

С уменьшением заряда на обкладках конденсатора происходит уменьшение разрядного тока и, как следствие, замедление нарастания магнитного поля катушки.

Разрядный ток достигает максимального значения I_0 тогда, когда заряд на обкладках конденсатора станет равным нулю. Тогда же энергия электрического поля также станет равной нулю, а энергия магнитного поля, в соответствии с законом сохранения энергии, достигнет максимального значения

$$W_{\text{i}} = \frac{LI_0^2}{2}.$$

ЭДС самоиндукции в этот момент времени также обращается в нуль, так как ток I_0 не изменяется (рис. 28.3, *в*). После этого сила тока и созданное им магнитное поле начинают уменьшаться (рис. 28.3, *г*), но не мгновенно так как в катушке снова возникает ЭДС самоиндукции. Эта ЭДС согласно правилу Ленца создает индукционный ток, направление которого совпадает с направлением разрядного тока. Благодаря этому происходит перезарядка конденсатора. Скорость уменьшения силы тока возрастает, возрастает и ЭДС самоиндукции. В тот момент времени, когда разрядный ток становится равным нулю, ЭДС самоиндукции достигает максимального значения. При этом конденсатор будет полностью перезаряжен (рис. 28.3, *д*) и тока в контуре не будет.

В следующий момент времени конденсатор снова начинает разряжаться, ЭДС самоиндукции противодействует току разрядки, который возрастает все медленнее. При этом индукция магнитного поля вновь возрастает в противоположном направлении (рис. 28.3, *е*). Разрядный ток достигает максимального значения $-I_0$ в момент времени, когда заряд конденсатора и ЭДС самоиндукции становятся равными нулю (знак «минус» показывает, что направление тока изменилось на противоположное) (рис. 28.3, *ж*). После этого сила тока опять уменьшается, возникает ЭДС самоиндукции, которая препятствует уменьшению силы тока. Катушка снова является источником тока, который перезаряжает конденсатор (рис. 28.3, *з*). Причем вторая перезарядка возвращает контур в исходное положение (см. рис. 28.3, *а*). Это значит, что заряд на верхней обкладке конденсатора пройдет полный цикл изменений: от $+q_0$ до нуля, затем до $-q_0$, потом снова до нуля и, наконец, до первоначального значения $+q_0$. Сила тока в контуре также пройдет полный цикл изменений: от нуля до $+I_0$, затем снова до нуля, потом до максимального значения в противоположном направлении $-I_0$ и, наконец, снова до нуля. Затем эти циклы будут периодически повторяться.

Минимальный промежуток времени, на протяжении которого заряд на обкладках конденсатора или ток в контуре проходит полный цикл изменений, называется *периодом* колебаний. Период собственных колебаний в контуре зависит только от размеров контура и не зависит от внешних факторов.

Поскольку полная энергия идеального контура согласно формуле (28.1)

$$W = \frac{q^2}{2C} + \frac{LI^2}{2}$$

не зависит от времени, то ее производная по времени равна нулю, это значит $W'(t) = 0$, т. е.

$$\left(\frac{q^2}{2C}\right)' + \left(\frac{LI^2}{2}\right)' = 0,$$

поэтому скорость увеличения (уменьшения) энергии магнитного поля катушки при разряде (заряде) конденсатора равна скорости уменьшения (увеличения) энергии электрического поля конденсатора. Значит,

$$\frac{1}{\tilde{N}} q'(t) q(t) = LI'(t) I(t).$$

Если учесть, что мгновенное значение силы тока в катушке $I(t) = q'(t)$, а $I'(t) = q''(t)$, то окончательно получим:

$$q'' + \frac{1}{LC} q = 0. \tag{28.3}$$

Полученное уравнение эквивалентно уравнению гармонических колебаний $\tilde{o}'' - \omega_0 \tilde{o} = 0$, что позволяет сделать вывод о возникновении таких колебаний в контуре. Решение этого уравнения, как известно, имеет вид:

$$q = q_0 \cos \omega_0 t, \tag{28.4}$$

где

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \; - \tag{28.5}$$

циклическая частота колебаний; q_0 – максимальное значение заряда на обкладках конденсатора в начальный момент времени. Поскольку циклическая частота и период гармонических колебаний связаны соотношением $\grave{O} = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$, то получим *формулу Томсона* для периода колебаний:

$$T = 2\pi\sqrt{LC}\,. \tag{28.6}$$

Мгновенное значение силы тока в катушке с учетом выражения (28.4) равно:

$$I = q'(t) = -q_0\omega_0 \sin\omega t = q_0\omega_0 \cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right), \tag{28.7}$$

где

$$q_0\omega_0 = CU_0\frac{1}{\sqrt{LC}} = U_0\sqrt{\frac{C}{L}} = I_0\ - \tag{28.8}$$

максимальное значение силы тока.

С учетом (28.8) выражение для силы тока (28.7) примет вид:

$$I = I_0 \cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right). \tag{28.9}$$

Выражение для мгновенного значения ЭДС самоиндукции согласно формуле (22.4) запишется тогда как

$$\mathcal{E}_{\tilde{n}}(t) = -LI'(t) = Lq''(t) = -Lq_0\omega_0^2 \sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right), \tag{28.10}$$

где

$$\mathcal{E}_0 = Lq_0\omega_0^2\ - \tag{28.11}$$

максимальное значение ЭДС самоиндукции. Поэтому

$$\mathcal{E}_{\tilde{n}}(t) = \mathcal{E}_0 \cos(\omega_0 t + \pi). \tag{28.12}$$

Зависимость заряда, силы тока и ЭДС самоиндукции от времени на протяжении одного периода показана на рис. 28.4.

Если подставить мгновенные значения заряда (28.4) и силы тока (28.9) в формулу (28.1), то получим выражение для полной энергии контура:

$$W = \frac{q_0^2}{2C}\cos^2\omega_0 t + \frac{I_0^2 L}{2}\sin^2\omega_0 t\,. \tag{28.13}$$

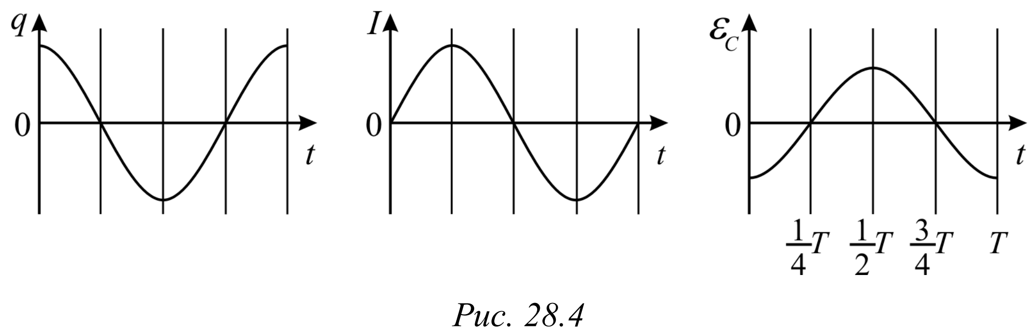

Рис. 28.4

Согласно формулам (28.5) и (28.8) выражение для полной энергии может быть окончательно записано следующим образом:

$$W = \frac{q_0^2}{2C} = \frac{LI_0^2}{2}. \qquad (28.14)$$

28.3. Затухающие колебания

В электромагнитном колебательном контуре всегда есть превращения части энергии в тепло из-за наличия активного сопротивления цепи. Поэтому если не принимать специальных мер, то амплитуда колебаний будет уменьшаться и с течением времени колебания прекратятся. Такие колебания называются *затухающими*.

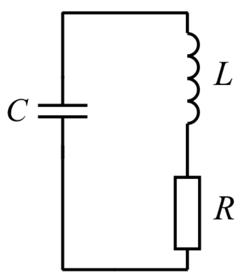

Рис. 28.5

Мгновенное значение тока для затухающих колебаний можно рассчитать по формуле (28.9)

$$I = I_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right),$$

однако амплитуду I_0 надо считать убывающей.

Рассмотрим *реальный* контур, который содержит омическое сопротивление R (рис. 28.5).

Для описания процесса колебаний в этом случае запишем II правило Кирхгофа:

$$-L\frac{dI}{dt} = IR + \frac{q}{c},$$

или

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = 0. \qquad (28.15)$$

Введем обозначения:

$$\frac{R}{L} = 2\beta, \qquad (28.16)$$

$$\frac{1}{LC} = \omega_0^2. \qquad (28.17)$$

С учетом этих обозначений выражение (28.15) примет вид:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta\frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0. \qquad (28.18)$$

Его решением является следующая зависимость заряда от времени:

$$q = q_0 e^{-\beta t} \cos \omega t, \tag{28.19}$$

где

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left[\frac{R}{2L}\right]^2} \; - \tag{28.20}$$

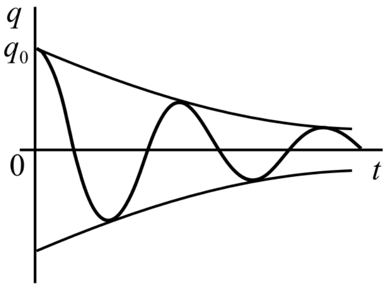

Рис. 28.6

частота колебаний в контуре; ω_0 – собственная частота колебаний контура. Решение (28.19) представляет собой гармоническое колебание с амплитудой $q_0 e^{-\beta t}$, которая убывает со временем по экспоненте (рис. 28.6).

Чем больше омическое сопротивление контура, тем быстрее затухают колебания. Скорость затухания колебаний определяет коэффициент затухания β и связанный с ним логарифмический декремент затухания

$$\delta = \beta T. \tag{28.21}$$

Можно показать, что

$$\delta = \ln \frac{q_n}{q_{n-1}}, \tag{28.22}$$

т. е. логарифмический декремент затухания равен натуральному логарифму отношения двух амплитуд, которые разделены между собой промежутком времени, равным периоду.

Период колебаний в реальном контуре будет определяться по формуле

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}}. \tag{28.23}$$

Из выражений (28.20) и (28.23) следует, что если

$$\frac{1}{LC} = \frac{R^2}{4L^2}, \tag{28.24}$$

то циклическая частота ω будет равна нулю, а период колебаний становится бесконечно большим. Это означает, что если активное сопротивление контура

$$R \geq \sqrt{\frac{4L}{C}}, \tag{28.25}$$

то колебания в нем не возникают. Сопротивление контура, при котором колебательный процесс в нем переходит в непериодический, называют *критическим*

$$R_{\hat{e}} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}. \tag{28.26}$$

Величину $\sqrt{\dfrac{L}{C}}$ называют *волновым сопротивлением* контура, а отношение волнового сопротивления контура к его активному сопротивлению – *добротностью* контура Q, т. е.

$$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}\,. \qquad (28.27)$$

Чем выше добротность контура, тем медленнее в нем затухают электромагнитные колебания.

28.4. Вынужденные колебания в контуре. Резонанс

Рассмотрим вынужденные колебания в контуре. Пусть реальный контур (рис. 28.7) содержит внешнюю ЭДС, которая изменяется со временем по закону $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin\omega t$.

Согласно II правилу Кирхгофа для этого контура можно записать:

$$\mathcal{E}_0 \sin\omega t - L\frac{d^2q}{dt^2} = \frac{dq}{dt}R + \frac{q}{C},$$

или

$$\frac{\mathcal{E}_0}{L}\sin\omega t = \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q\,. \qquad (28.28)$$

Если использовать введенные обозначения (28.16) и (28.17), то получим:

$$\frac{\mathcal{E}_0}{L}\sin\omega t = \frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta\frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q\,. \qquad (28.29)$$

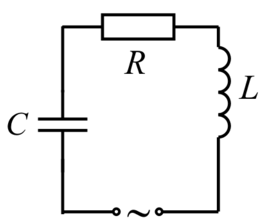

Рис. 28.7

Уравнение (28.29) является линейным неоднородным дифференциальным уравнением. Его решение состоит из общего решения однородного уравнения и собственного решения неоднородного. Первое рассмотрено в предыдущем параграфе и, поскольку затухающие колебания быстро прекращаются, то в дальнейшем их можно не учитывать. Поэтому можно удовлетвориться решением неоднородного уравнения, которое для силы тока имеет вид:

$$I = I_0 \sin\left(\omega t - \varphi\right). \qquad (28.30)$$

Амплитудное значение тока можно рассчитать из закона Ома:

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}\,. \qquad (28.31)$$

Из формулы (28.31) следует, что ток будет максимальным при условии резонанса

$$\omega = \omega_{\delta}$$

(см. формулу (26.18)), т. е. при условии

$$\omega_{\delta} L = \frac{1}{\omega_{\delta} C},$$

где $\omega_{\delta} = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ – резонансная частота.

С учетом этого выражение (28.27) для добротности контура можно представить:

$$Q = \frac{\omega_{р}}{\Delta\omega}, \qquad (28.32)$$

где $\Delta\omega$ – интервал частот на уровне изменения амплитуды в $\sqrt{2}$ раз. Q – численно равно количеству колебаний, которые произойдут в контуре, если его отключить от источника ЭДС.

28.5. Электрические автоколебания. Автогенераторы

Автоколебания представляют собой незатухающие колебания в колебательной системе, которые поддерживаются за счет источника энергии, причем поступлением энергии в систему управляет сама колебательная ситема. Автоколебания могут возникать в различных системах: механических, электромеханических, электрических и др. При этом их возникновение и существование обусловлено процессами, происходящими в самой колебательной системе. Внешние воздействия на систему для поддержания в ней автоколебаний не нужны. В этом заключается принципиальное отличие автоколебаний от вынужденных колебаний, для поддержания которых на систему должны действовать периодические внешние силы.

Возникновение автоколебаний является самопроизвольным процессом. Оно обусловлено случайными малыми воздействиями на систему, которые выводят ее из состояния равновесия. Малые колебания, которые возникают под влиянием таких воздействий, самопроизвольно нарастают, в результате чего устанавливаются устойчивые колебания, характеристики которых полностью определяются параметрами колебательной системы и не зависят от состояния системы в момент возбуждения автоколбаний. Поэтому частота автоколебаний всегда равна частоте свободных колебаний рассматриваемой колебательной системы, а амплитуда автоколебаний имеет значение, которое соответствует компенсации затрат энергии в колебательной системе за счет энергии, которая поступает в систему от источника.

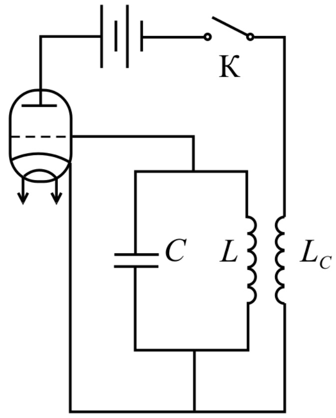

Рис. 28.8

В состав любой автоколебательной системы входят: неконсервативная колебательная система, в которой есть затраты энергии; источник энергии, за счет которого затраты компенсируются; регулятор (клапан), который обеспечивает поступление энергии от источника в систему и звено обратной связи, с помощью которого колебательная система управляет работой клапана.

Обратную связь называют положительной, если в результате воздействия источника энергии на колебательную систему энергия системы возрастает, это значит, что источник энергии выполняет положительную работу. В случае отрицательной обратной связи источник забирает энергию от колебательной системы. Поэтому автоколебания могут существовать только при положительной обратной связи между источником энергии и колебательной системой.

Одной из наиболее распространенных автоколебательных систем является *автогенератор* электромагнитных колебаний. Его основными элементами являются: колебательный контур (колебательная система); источник постоянного тока (источник энергии); транзистор или вакуумный триод (клапан); катушка обратной связи. Схема простейшего автогенератора приведена на рис. 28.8.

Колебательный контур автогенератора, который состоит из конденсатора емкостью C и катушки индуктивности L, включены в цепь управляющей сетки электронной лампы. В цепь анода включена питающая батарея и катушка связи LC, которая расположена в непосредственной близости от катушки контура L, так что между ними существует индуктивная связь.

Если в контуре возбудить колебания (замкнуть ключ), то на обкладках конденсатора появится переменное напряжение. Такое же напряжение возникнет между управляющей сеткой и катодом лампы, поскольку они подключены к обкладкам конденсатора. В цепи анода появится переменный ток с частотой, равной частоте колебаний контура. Проходя через катушку LC, этот ток будет создавать в катушке L ЭДС взаимной индукции. Эта ЭДС в зависимости от взаимной ориентации витков двух катушек может либо поддерживать колебания в контуре, либо останавливать. Очевидно, что всегда можно катушки ориентировать так, чтобы обратная связь была положительной и колебательный контур получал энергию от источника тока. В таком случае в контуре установятся незатухающие колебания.