Лекция 3

Графический показ электрических полей. Теорема Гаусса и ее применение

Вопросы. *Графический показ электрических полей. Поток вектора напряженности электрического поля. Теорема Гаусса и ее применение.*

3.1. Силовые линии

Графически электрическое поле можно описать, указав для каждой точки модуль и направление вектора напряженности. Однако на практике для наглядного изображения электрических полей пользуются *силовыми линиями* или *линиями напряженности*. Под силовой линией следует понимать линию, касательная к которой в любой точке поля, через которую она проходит, совпадает с направлением вектора напряженности в той же точке (рис. 3.1).

Силовой линии приписывают направление, отмечая его на чертежах стрелкой. Обычно силовые линии проводят с такой густотой, что их число, пронизывающее единичную площадку, расположенную перпендикулярно к ним, равно модулю вектора напряженности в месте расположения площадки. На рис. 3.2 изображены силовые линии поля, создаваемого точечным зарядом.

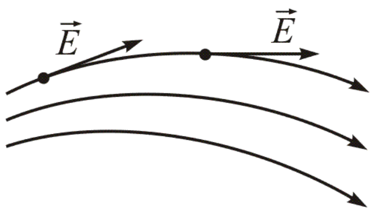
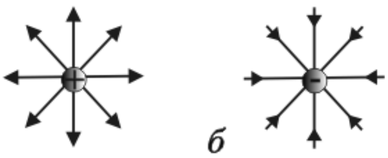


Рис. 3.1



а ***б***

Рис. 3.2

Линии представляют собой совокупность радиальных прямых. Поскольку их направление совпадает с направлением вектора напряженности, то у положительного заряда они начинаются на заряде и заканчиваются в бесконечности. А у отрицательного заряда наоборот начинаются в бесконечности, а заканчиваются на заряде. На рис. 3.3 представлены силовые линии поля диполя.

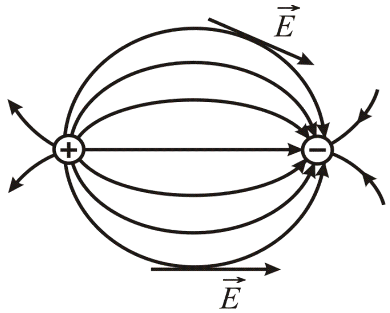


Рис. 3.3

Они начинаются у положительного заряда и заканчиваются у отрицательного. По плотности силовых линий можно судить о величине напряженности поля. Чем гуще проходят линии, тем больше значение напряженности поля. Из рис. 3.2 следует, что напряженность поля по мере удаления от заряда уменьшается. Так как густота силовых линий равна значению напряженности поля (для точечного заряда $E = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r^2}$), то на любом расстоянии число линий пронизывающих сферу, в центре которой находится заряд, является величиной постоянной:

$$N = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\times 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}.$$

Значит, линии нигде, кроме заряда, не начинаются и не заканчиваются. Кроме того линии нигде не пересекаются и не касаются друг друга. Противное означает, что в одной точке напряженность поля может иметь несколько направлений одновременно, что невозможно.

3.2. Поток вектора напряженности

Понятие потока вектора является одним из важнейших в векторном анализе. Если число силовых линий, пронизывающих единичную площадку, размещенную перпендикулярно им, равно модулю вектора $\vec{E}$, то можно говорить о понятии потока вектора напряженности электрического поля.

Рассмотрим площадку $S_\perp$, через которую проходит N силовых линий (рис. 3.4).

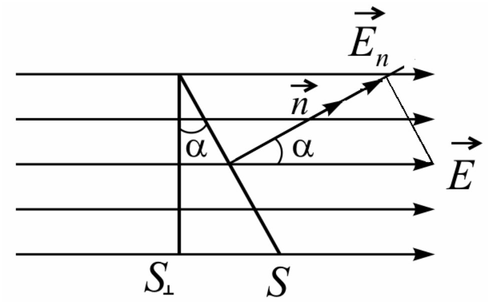


Рис. 3.4

Тогда

$$E = \frac{N}{S_\perp}.$$

Очевидно, столько же силовых линий проходит и через площадку S, расположенную под произвольным углом α к направлению силовых линий. Поскольку $S_\perp = S\cos\alpha$,

$$E = \frac{N}{S\cos\alpha}.$$

Однако $E\cos\alpha = E_n$ – проекция вектора $\vec{E}$ на направление нормали $\vec{n}$ к площадке S. В таком случае число силовых линий пронизывающих произвольную площадку, размещенную в электрическом поле равно:

$$N = ES\cos\alpha = E_n S. \tag{3.1}$$

Если поле неоднородное, то всегда можно выбрать элементарную площадку dS, которую можно считать плоской, а поле в ее окрестностях – однородным. В таком случае

$$dN = E_n dS,$$

а

$$N = \int_S E_n dS. \tag{3.2}$$

Правую часть уравнения (3.2) называют потоком вектора $\vec{E}$ через поверхность S:

$$\Phi_E = \int_S E\cos\alpha \cdot dS = \int_S E_n dS\,. \tag{3.3}$$

Поток – величина скалярная. $\Phi_{\hat{A}}$ может быть больше нуля, или меньше нуля в зависимости от значения угла α: если угол α острый, то $\cos\alpha \succ 0$ и поток положительный; если угол α тупой, то $\cos\alpha \prec 0$ и поток отрицательный; при $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ поток равен нулю.

Если поверхность замкнутая, то за положительное направление нормали выбирают ее внешнюю нормаль.

Выражение (3.3) можно записать в виде скалярного произведения двух векторов:

$$\Phi_{\hat{A}} = \int_S \left(\vec{E}\cdot\vec{n}\right) dS\,. \tag{3.4}$$

3.3. Теорема Гаусса

Теорема Гаусса формулируется так: ***поток вектора напряженности электрического поля в вакууме через любую замкнутую поверхность равен алгебраической сумме зарядов, охваченных этой поверхностью, деленной на*** ε_0.

$$\Phi_{\hat{A}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{\varepsilon_0}\,. \tag{3.5}$$

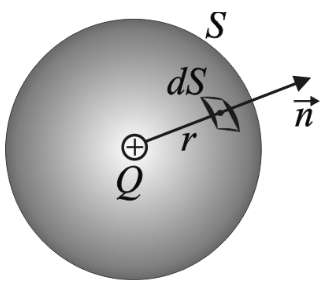


Рис. 3.5

Доказательство.

Докажем теорему сразу для точечного заряда. Пусть заряд q, создающий поле, находится в центре воображаемой сферической поверхности радиуса r (рис. 3.5).

Модуль вектора напряженности в любой точке поверхности определяется формулой (2.2):

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2},$$

а его направление совпадает с направлением вектора нормали $\vec{n}$ к сферической поверхности. Тогда

$$E = E_n = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\,.$$

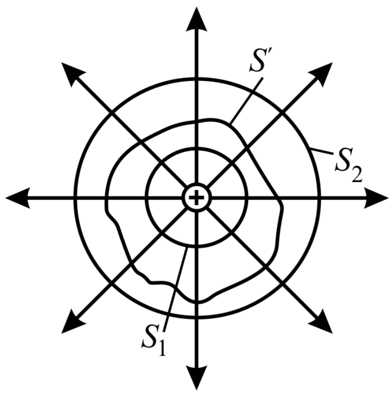


Рис. 3.6

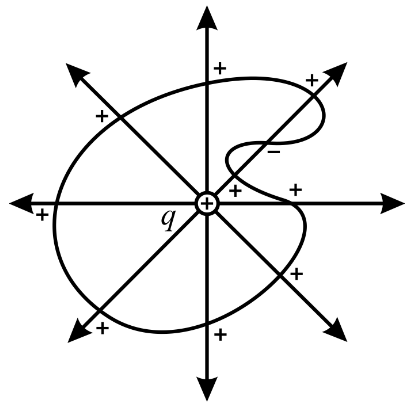


Рис. 3.7

Подставим последнее выражение в (3.3):

$$\Phi_E = \int_S \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dS = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \int_0^{\pi r^2} dS = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}. \quad (3.6)$$

Таким образом поток вектора напряженности электрического поля не зависит от радиуса сферической поврхности. А это означает, что он будет неизменным для любого точечного заряда, если последний находится внутри сферы. Очевидно формула (3.6) будет справедлива в случае замкнутой поверхности любой формы и любого произвольного расположения заряда внутри ее. На рис. 3.6 показано, что через поверхность произвольной формы S проходит столько же силовых линий, сколько и через через сферические поверхности S_1 и S_2.

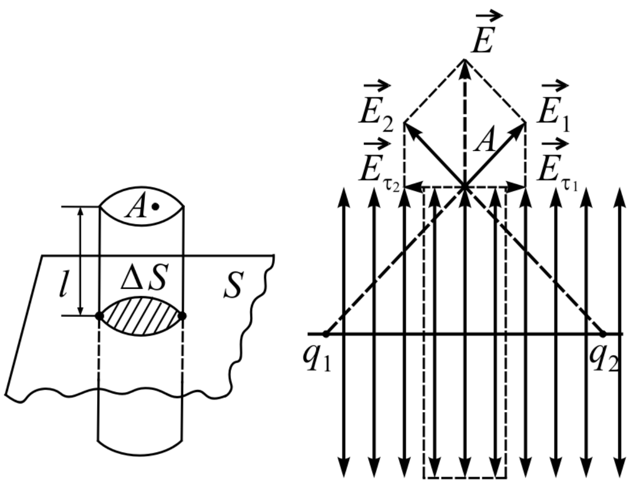
Форма поверхности может быть такова, что отдельные силовые линии могут пересекать ее несколько раз (рис. 3.7). Однако это не увеличивает число силовых линий, которые пронизывают поверхность. Часть линий в таком случае будут не только выходить из нее (они имеют знак «+»), но и входить (знак «–»). Поскольку любую произвольную систему электрических зарядов можно представить как совокупность точечных зарядов, то теорема Гаусса справедлива для любой такой системы.

3.4. Применение теоремы Гаусса

Теорему Гаусса удобно применять для вычисления электрических полей при симметричных распределениях зарядов.

Поле бесконечной, равномерно заряженной плоскости в вакууме. Плоскость заряжена с поверхностной плотностью заряда σ. Под поверхностной плотностью заряда понимают средний заряд, приходящийся на единицу площади поверхности:

$$\sigma = \frac{dq}{dS},$$



а *б*

Рис. 3.8

где dS – площадь элементарной поверхности, на которой находится заряд dq. $[\sigma] = 1$ Кл/м^2. Найдем напряженность электрического поля в произвольно взятой точке, удаленной от плоскости на расстояние l (рис. 3.8, *а*).

Мысленно построим цилиндр так, чтобы его образующая была перпендикулярной плоскости S, которая при этом делит цилиндр пополам, а на одном из оснований находится взятая для расчета точка. Такой цилиндр является замкнутой поверхностью, к которой можно применить теорему Гаусса. Заряд внутри этой поверхности находится только на площадке ΔS и равен $q = \sigma \Delta S$. Так как плоскость бесконечна и заряжена равномерно, для любого заряда на ней всегда можно найти такой же заряд, что вектор их суммарной напряженности будет перпендикулярен плоскости. Из рис. 3.8, *б* видно, что горизонтальные составляющие напряженностей, создаваемых зарядами q_1 и q_2 в выбранной точке равны по величине и противоположны по направлению. Следовательно, в любой точке пространства вектор напряженности перпендикулярен плоскости, а поток вектора напряженности через боковую поверхность, мысленно построенного цилиндра, равен нулю. В таком случае поток вектора $\vec{E}$ сквозь поверхность цилиндра определяется суммой

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2,$$

где $\Phi_1 = \mathring{A}\,\Delta S$ – поток через нижнее основание цилиндра; $\Phi_2 = E\,\Delta S$ – поток через верхнее основание цилиндра. Откуда $\Phi = 2E\,\Delta S$. Согласно теореме Гаусса

$$2E\,\Delta S = \frac{\sigma \Delta S}{\varepsilon_0},$$

откуда

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}. \tag{3.7}$$

Таким образом, напряженность электрического поля, создаваемого бесконечной равномерно заряженной плоскостью имеет во всех точках пространства одно и то же значение и зависит только от поверхностной плотности заряда.

Поле двух бесконечных параллельных разноименно заряженных плоскостей с одинаковыми поверхностными плотностями зарядов в вакууме. Плотности зарядов на поверхности плоскостей соответственно равны $+\sigma$ и $-\sigma$.

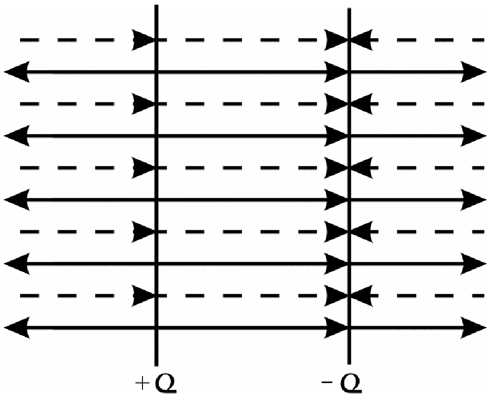


Рис. 3.9

На рис. 3.9 линии напряженности положительно заряженной плоскости показаны сплошными линиями, а отрицательно заряженной – пунктирными линиями. Внутри между плоскостями линии направлены в одну сторону. Густота и тех и других линий одинакова. Следовательно, одинаковы и напряженности полей, создаваемые обеими плоскостями. За пределами плоскостей силовые линии направлены в противоположные стороны. Согласно принципу суперпозиции вне плоскостей напряженность суммарного поля равна нулю, а между ними она вдвое больше напряженности поля одной плоскости

$$\mathring{A} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \tag{3.8}$$

Поле равномерно заряженной сферы. Положительный заряд q равномерно распределен по сферической поверхности радиусом R (рис. 3.10). Найдем напряженность поля за пределами сферы в произвольной точке A ($r \succ R$). Для этого окружим сферу воображаемой сферической поверхностью, на которой расположена точка. Вектор напряженности в любой точке за пределами заряженной сферы направлен вдоль продолжения одного из радиусов, его модуль на поверхности воображаемой сферы имеет одно и то же значение, а полный поток через последнюю сферу равен

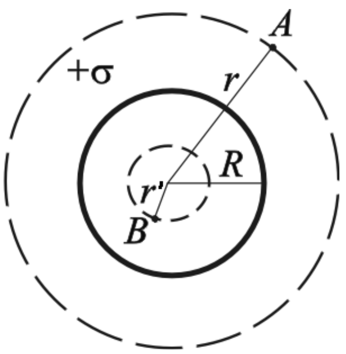


Рис. 3.10

$$\Phi_{\mathring{A}} = \mathring{A} \cdot 4\pi r^2.$$

Согласно теореме Гаусса

$$\mathring{A} \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0},$$

откуда

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}. \tag{3.9}$$

Чтобы рассчитать напряженность внутри заряженной сферы поступим точно таким же образом. Проведем воображаемую сферу через произвольную точку B. Поток через нее определяется выражением

$$\Phi_{\mathring{A}} = \mathring{A} \cdot 4\pi r'^2.$$

Однако внутри этой сферы заряда нет. Согласно теореме Гаусса

$$\Phi_{\mathring{A}} = \mathring{A} \cdot 4\pi r'^2 = 0.$$

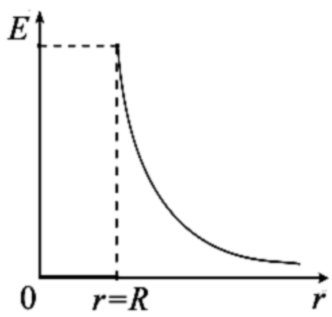


Рис. 3.11

Следовательно, $\mathring{A} = 0$. На рис. 3.11 представлен график зависимости напряженности поля равномерно заряженной сферы радиуса R от расстояния.

Поле равномерно заряженного шара. Воспользуемся еще раз для наглядности рис. 3.10. Положительный заряд q равномерно распределен по объему шара радиуса R с объемной плотностью ρ. Объемная плотность равномерно заряженного по всему объему тела определяется как заряд единицы объема

$$\rho = \frac{dq}{dV},$$

где dV – элементарный объем, в котором распределен элементарный заряд dq. $[\rho] = 1$ Кл/м^3. Вектор напряженности электрического поля, как и в предыдущем случае, направлен вдоль радиуса шара и его продолжения. За пределами шара при $r \succ R$ поле заряженного шара рассчитывается точно так же, как и поле заряженной сферы по формуле (3.9).

Чтобы рассчитать поле внутри заряженного шара, как и в случае сферы, проведем воображаемую сферу через произвольную точку B радиусом $r' \prec R$. Внутри этой сферы находится заряд

$$q' = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r'^3,$$

где $\frac{4}{3}\pi r'^3$ – объем воображаемой сферы, а $\rho = \dfrac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \dfrac{3}{4}\dfrac{q}{\pi R^3}$ – объемная плотность заряда в шаре. Тогда

$$q' = \frac{3}{4}\frac{q}{\pi R^3} \cdot \frac{4}{3}\pi r'^3 = q\frac{r'^3}{R^3}.$$

Согласно теореме Гаусса поток вектора напряженности через воображаемую сферу

$$\Phi_E = E \cdot 4\pi r'^2 = \frac{q'}{\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0}\frac{r'^3}{R^3},$$

откуда

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r'}{R^3}. \qquad (3.10)$$

Таким образом, напряженность электрического поля внутри равномерно заряженного шара возрастает прямо пропорционально расстоянию от его центра, а за

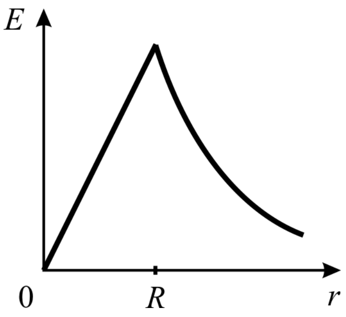


Рис. 3.12

его пределами убывает прямо пропорционально квадрату расстояния от того же центра (рис. 3.12).

Поле равномерно заряженной бесконечной прямой нити. Положительный заряд равномерно распределен на нити бесконечно большой длины с линейной плотностью $\gamma = \dfrac{dq}{dl}$ (рис. 3.13), где dq – заряд, находящийся на элементе длины нити – dl. $[\gamma] = 1$ Кл/м. Рассчитаем напряженность поля, создаваемого заряженной нитью в произвольной точке A на расстоянии r от нити. Для этого построим воображаемый цилиндр таким образом, чтобы на его боковой поверхности находилась точка A, а ось цилиндра совпадала с нитью. Внутри цилиндра находится заряд $q = \gamma l$, где l – высота цилиндра. Согласно теореме Гаусса поток вектора напряженности через поверхность цилиндра

$$\Phi_{\AA} = \frac{\gamma l}{\varepsilon_0}.$$

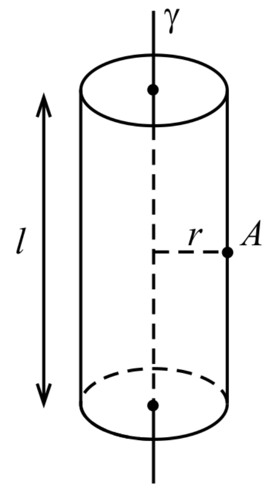


Рис. 3.13

Поток через основания цилиндра из соображений симметрии равен нулю (см. поле бесконечной плоскости). Поэтому

$$\Phi_{\AA} = E \cdot 2\pi r l = \frac{\gamma l}{\varepsilon_0}.$$

Откуда

$$E = \frac{\gamma}{2\pi\varepsilon_0 r}. \qquad (3.11)$$

Таким образом, поле бесконечной заряженной нити убывает прямо пропорционально расстоянию.

Поле равномерно заряженного цилиндра. Напряженности полей, создаваемых равномерно заряженным полым цилиндром с поверхностной плотностью распределения заряда σ и равномерно заряженным сплошным цилиндром с объемной плотность распределения заряда ρ, читателю предлагается рассмотреть самостоятельно.