

## Лекция 31

### Электромагнитные волны в длинных линиях

**Вопросы.** Понятие о системе канализации электромагнитной энергии. Волны вдоль проводов. Волновое уравнение. Скорость волны. Волновое сопротивление линии. Отражение волн. Стоячие волны в отрезках длинных линий.

#### 31.1. Двухпроводные линии

Электрическая энергия переменного тока от генераторов (электростанций) передается по проводам потребителям, которые расположены, как правило, на больших расстояниях. Провода линии при этом исполняют роль каналов, вдоль которых распространяется электромагнитное поле. Рассмотрим элемент проводника, по которому передается электрический ток (рис. 31.1).

Пусть удельное сопротивление проводника  $\rho$ , плотность тока в нем

$$j = \frac{I}{S},$$

где  $S$  – площадь сечения проводника;  $\rho = \frac{1}{\sigma}$ , где  $\sigma$  – удельная электропроводность.

Напряженность электрического поля  $\vec{A}$  на поверхности проводника состоит из двух частей: нормальной и тангенциальной:

$$\vec{A} = \vec{A}_n + \vec{A}_\tau.$$

Ток, текущий по проводнику, создает на его поверхности магнитное поле, напряженность которого согласно формулам (19.1) и (19.8) равна:

$$H = \frac{I}{2\pi r}, \quad (31.1)$$

где  $r$  – радиус проводника.

Вектор  $\vec{H}$  направлен по касательной к окружности сечения проводника (рис. 31.2).

Вектор Умова–Пойнтинга, согласно формуле (30.23) численно равный  $S = EH$ , в этом случае состоит из двух частей: нормальной составляющей,

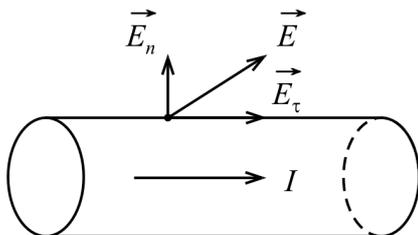


Рис. 31.1

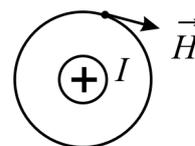


Рис. 31.2

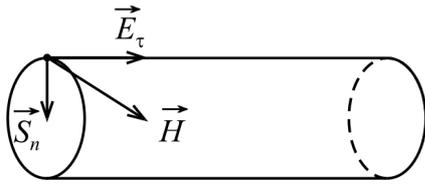


Рис. 31.3

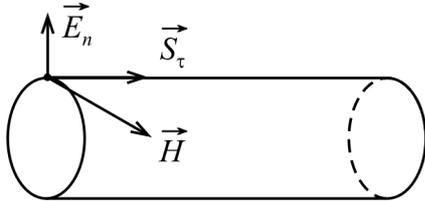


Рис. 31.4

направленной по радиусу внутрь проводника (рис. 31.3),

$$S_n = E_\tau H \quad (31.2)$$

и тангенциальной составляющей

$$S_\tau = E_n H, \quad (31.3)$$

которая направлена вдоль проводника (рис. 31.4).

Таким образом, при протекании тока по проводнику тангенциальная составляющая напряженности  $E_\tau$  электрического поля обеспечивает проникновение части потока энергии  $S_n$  внутрь проводника. Нормальная составляющая напряженности  $E_n$  обеспечивает передачу части потока  $S_\tau$  вдоль линии.

Таким образом, энергия электрического тока канализируется, проникая внутрь проводника и перемещаясь вдоль него.

Рассчитаем величину  $S_n$ . Для этого используем закон Ома в дифференциальной форме

$$j = \sigma E_\tau = \frac{E_\tau}{\rho},$$

откуда

$$E_\tau = j\rho.$$

Тогда с учетом (31.1) вместо (31.2) можно записать:

$$S_n = E_\tau H = j\rho \frac{I}{2\pi r} = j\rho j \frac{\pi r^2}{2\pi r} = \frac{1}{2} j^2 \rho r. \quad (31.4)$$

Так как величина  $S_n$  по определению (см. формулу 30.21) равна

$$S_n = \frac{W}{S_{i\hat{a}} \Delta t},$$

то за время  $\Delta t$  через боковую поверхность  $S_{i\hat{a}}$  внутрь проводника, длина которого  $l$ , будет проникать энергия

$$W = S_n S_{i\hat{a}} \Delta t, \quad (31.5)$$

которая внутри проводника будет выделяться в виде «джоулевой» теплоты.

Подставив (31.4) в (31.5) с учетом того, что площадь боковой поверхности цилиндрического проводника  $S_{i\hat{a}} = 2\pi r l$ , получим выражение для энергии, проникающей внутрь:

$$Q = W = \frac{1}{2} j^2 \rho r \cdot 2\pi r l \Delta t = \frac{I^2}{\pi r^2 \pi r^2} \pi r^2 l \rho \Delta t = I^2 R \Delta t, \quad (31.6)$$

что соответствует закону Джоуля–Ленца в интегральной форме.

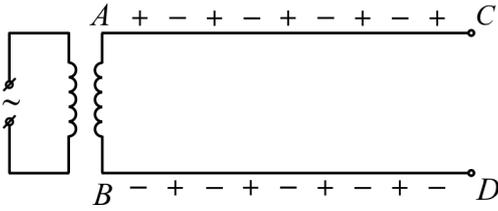


Рис. 31.5

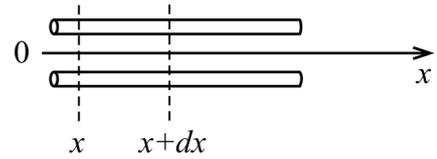


Рис. 31.6

Таким образом, при передаче электрической энергии на большие расстояния целесообразно использовать проводники с как можно меньшим удельным сопротивлением  $\rho$ , чтобы уменьшить тепловые потери в линии.

Если  $\rho \rightarrow 0$ , то передача электрической энергии происходит почти без потерь. Это состояние проводника называют *сверхпроводимостью*.

Рассмотрим длинную двухпроводную линию, которая через трансформатор подключена к генератору переменной ЭДС (рис. 31.5).

При изменении ЭДС с заданной частотой с такой же частотой происходит направленное движение свободных зарядов во вторичной обмотке  $AB$  трансформатора. В момент времени, соответствующий половине периода колебаний напряжения, это движение имеет направление от  $A$  к  $B$ , в следующий – наоборот, что вынуждает таким же образом двигаться свободные заряды в самой линии. Если частота изменения ЭДС большая, то при конечной скорости распространения поля в проводнике вдоль линии происходит периодическое изменение направления движения зарядов, что вызывает периодическое накопление положительных и отрицательных зарядов на отдельных частях линии. Таким образом, двухпроводная линия представляет собой линейную емкость и линейную индуктивность. Отдельные малые части линии можно представить себе как колебательные контуры.

Пусть единица длины линии представляет собой линейную емкость  $\tilde{N}_0$  и линейную индуктивность  $L_0$ . Выделим два сечения линии с координатами  $x$  и  $x + dx$  (рис. 31.6).

Пусть в сечении  $x$  значение напряжения  $U$ , а в сечении  $x + dx$  –  $U + \frac{\partial U}{\partial x} dx$ , а сила тока соответственно  $I$  и  $I + \frac{\partial I}{\partial x} dx$ .

Согласно второму правилу Кирхгофа изменение напряжения на  $dx$  происходит вследствие возникновения ЭДС самоиндукции:

$$\frac{\partial U}{\partial x} dx = -L_0 dx \frac{\partial I}{\partial t}, \quad (31.7)$$

а изменение тока – благодаря накоплению заряда на линейной емкости:

$$\frac{\partial I}{\partial x} dx = -C_0 dx \frac{\partial U}{\partial t}. \quad (31.8)$$

Если над выражениями (31.7) и (31.8) выполнить те же математические операции, что и над выражениями (30.5) и (30.6), то получим:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -L_0 \frac{\partial I}{\partial t}, \quad (31.9)$$

$$\frac{\partial I}{\partial x} = -C_0 \frac{\partial U}{\partial t}. \quad (31.10)$$

Уравнения (31.9) и (31.10) называют *телеграфными уравнениями*. Продифференцируем эти уравнения сначала по времени  $t$ , а потом по координате  $x$  и получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x \partial t} &= -L_0 \frac{\partial^2 I}{\partial t^2}; & \frac{\partial I}{\partial x \partial t} &= -C_0 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &= -L_0 \frac{\partial I}{\partial x \partial t}; & \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} &= -C_0 \frac{\partial U}{\partial x \partial t}. \end{aligned}$$

Из этих выражений следует:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = L_0 \tilde{N}_0 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \quad (31.11)$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = L_0 C_0 \frac{\partial^2 I}{\partial t^2}. \quad (31.12)$$

Обозначив через

$$v = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} \quad (31.13)$$

скорость волны, получим волновые уравнения:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \quad (31.14)$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 I}{\partial t^2}. \quad (31.15)$$

Решением этих уравнений являются уравнения бегущей волны:

$$U = U_0 \sin \omega \left( t - \frac{x}{v} \right), \quad (31.16)$$

$$I = I_0 \sin \omega \left( t - \frac{x}{v} \right). \quad (31.17)$$

Если продифференцировать выражения (31.16) и (31.17) по времени  $t$  и подставить их в телеграфные уравнения (31.9) и (31.10), а потом проинтегрировать их по координате  $x$ , получим связь между напряжением  $U$  и силой тока  $I$  в линии:

$$\frac{U}{I} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}. \quad (31.18)$$

Величину

$$Z = \frac{U}{I} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \quad (31.19)$$

называют *волновым сопротивлением линии*. Изменяя конфигурацию проводников, можно менять  $L_0$  и  $C_0$  и в соответствии с формулой (31.3) управлять скоростью электромагнитной волны.

При передаче электроэнергии с высоким КПД необходимо согласовывать сопротивление нагрузки и волновое сопротивление линии. В линии, замкнутой на нагрузку, происходит отражение электромагнитных волн. При определенных условиях, которые определяются частотой волны и длиной линии, в линии могут возникать стоячие волны. При этом передачи энергии происходить не будет, потому что вектор Умова–Пойнтинга будет равен нулю.