Лекция 4

Работа в электростатическом поле. Разность потенциалов

Вопросы. *Работа сил поля при перемещении зарядов в электрическом поле. Потенциал электрического поля. Циркуляция вектора напряженности электрического поля.*

4.1. Работа поля при перемещении зарядов

На любой заряд, помещенный в электрическое поле с напряженностью Å, действует сила, определяемая формулой (2.4), если этот заряд точечный. При перемещении заряда под действием этих сил совершается работа:

$$A = qEl\cos\alpha, \tag{4.1}$$

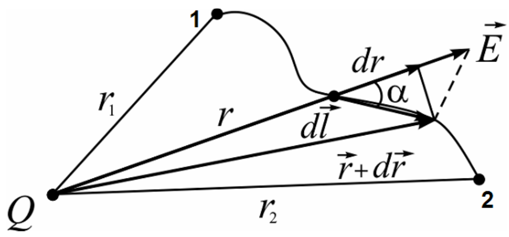

Рис. 4.1

где q – величина заряда; α – угол между перемещением заряда и направлением поля; l – перемещение.

Определим работу, которую совершает поле, создаваемое неподвижным точечным зарядом Q в вакууме, при перемещении им пробного заряда q по произвольной траектории, из пункта *1* в пункт *2* (рис. 4.1).

На траектории заряда выберем бесконечно малое перемещение $d\vec{l}$. Элементарная работа сил поля на этом перемещении:

$$dA = \vec{F}\,d\vec{l} = q\vec{E}\,d\vec{l} = qE\,dl\cos\alpha. \tag{4.2}$$

Поскольку dl – величина бесконечно малая, напряженность поля на этом элементарном отрезке можно считать величиной постоянной и равной

$$E = k\frac{Q}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}.$$

Элементарная работа в таком случае:

$$dA = k\frac{Qq}{r^2}dl\cos\alpha.$$

Согласно рис. 4.1, перпендикуляр, опущенный на направление действия силы (напряженности поля), отсекает отрезок dr, являющийся приращением радиус-вектора $\vec{r}$ на элементарном перемещении $d\vec{l}$:

$$dr = dl\cos\alpha.$$

Тогда

$$dA = k\frac{Qq}{r^2}dr.$$

Работа поля на отрезке *1*, *2* определяется интегралом

$$A_{12} = \int_1^2 dA = \int_{r_1}^{r_2} k\frac{Qq}{r^2}dr = kQq\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2} = kQq\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right). \quad (4.3)$$

Формула (4.30) показывает, что работа сил электрического поля по перемещению электрического заряда не зависит от траектории заряда. Она зависит только от его начального и конечного положений. Если $r_1 = r_2$, то $A_{12} = 0$. Это означает, что работа сил поля по перемещению заряда по замкнутому контуру равна нулю. Поля такого типа называют потенциальными или консервативными. Работа сил потенциального поля равна изменению потенциальной энергии:

$$A_{12} = W_{P1} - W_{P2}. \quad (4.4)$$

Сравнение формул (4.4) и (4.3) дают выражение для потенциальной энергии заряда в любой точке поля созданного другим точечным зарядом:

$$W_P = k\frac{Qq}{r} + \mathrm{const}. \quad (4.5)$$

Понятие потенциальной энергии имеет однозначный смысл, если задана энергия в какой-либо произвольной точке поля. Поэтому значение константы выбирается таким образом, чтобы при удалении заряда на бесконечность (т. е. $r = \infty$) потенциальная энергия обращалась в нуль. В таком случае

$$W_P = k\frac{Qq}{r}. \quad (4.6)$$

Если правую часть (4.6) разделить на величину пробного заряда q, то получим физическую величину, которая называется *потенциалом* поля в данной точке. ***Численно потенциал равен потенциальной энергии, которой обладал бы в данной точке поля единичный положительный заряд.*** Для поля точечного заряда потенциал равен

$$\varphi = k\frac{Q}{r}. \quad (4.7)$$

Сопоставляя (4.7), (4.6) и (4.4), работу по перемещению заряда между двумя точками поля можно представить как

$$\grave{A}_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (4.8)$$

Переносимый заряд может быть положительным и отрицательным. Соответственно и работа может иметь разные знаки. Принято считать работу сил поля положительной, а работу против сил поля отрицательной. Поэтому, чтобы получить правильный знак работы, вычисленной по формуле (4.8) необходимо считать разность потенциалов положительной, если при перемещении положительного заряда из точки *1* в точку *2* работа будет совершаться силами поля. Из формулы (4.8) следует и физический смысл разности потенциалов между двумя точками поля: ***работа, совершаемая силами поля при перемещении единичного положительного заряда из одной точки поля в другую.***

4.2. Циркуляция вектора напряженности электрического поля

Если траектория движения заряда замкнута, то $\varphi_1 = \varphi_2$ и соответственно работа по его перемещению равна нулю. Согласно (4.2) элементарная работа

$$dA = qE_l\,dl,$$

а при перемещении заряда по замкнутой траектории

$$A = \oint_l qE_l\,dl = q\oint_l E_l\,dl = 0.$$

Поскольку $q \neq 0$, $E_l\,dl = 0$.

В математике криволинейный интеграл по замкнутому контуру *l* от скалярного произведения вектора $\vec{E}$ на вектор $d\overline{l}$, касательный к контуру *l*, называют циркуляцией вектора $\vec{E}$ вдоль *l*. Таким образом, интеграл $\oint_l \vec{E}d\vec{l}$ называется *циркуляцией вектора напряженности электрического поля* $\vec{E}$ *по соответствующему замкнутому контуру **l.*** Другой формой записи циркуляции может быть интеграл вида $\oint_l E_l dl$. Учитывая тот факт, что циркуляция вектора напряженности электростатического поля по любому замкнутому контуру равна нулю, можно сформулировать еще один признак потенциальности поля: ***электрическое поле является потенциальным, если циркуляция вектора его напряженности по любому замкнутому контуру равна нулю.***

4.3. Потенциал поля, создаваемого системой точечных зарядов

Рассмотрим поле, создаваемое системой *n* точечных зарядов Q_1, Q_2, Q_3, …, Q_n (рис. 4.2).

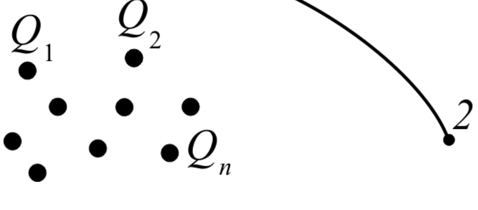

Рис. 4.2

Расстояния от каждого из зарядов до выбранной точки поля обозначим соответственно r_1, r_2, …, r_n. Работа сил этого поля по перемещению заряда *q* из пункта *1* в пункт *2* будет равна алгебраической сумме работ сил, обусловленных каждым из зарядов в отдельности:

$$A_{12} = \sum_{i=1}^{n} A_i.$$

Каждая из работ A_i (см. (4.3)) равна

$$A_i = k\left(\frac{Q_i q}{r_{i1}} - \frac{Q_i q}{r_{i2}}\right),$$

где r_{i1} – расстояние от заряда Q_i до начального положения заряда q, а r_{i2} – расстояние от Q_i до конечного положения заряда q. Следовательно,

$$A_{12} = k\sum_{i=1}^{n}\frac{Q_i q}{r_{i1}} - k\sum_{i=1}^{n}\frac{Q_i q}{r_{i2}}. \quad (4.9)$$

Сравнение последней формулы с (4.4) дает выражение для потенциальной энергии заряда q в поле системы зарядов

$$W_{п} = k\sum_{i=1}^{n}\frac{Q_i q}{r_i}.$$

Соответственно потенциал поля, создаваемого системой точечных зарядов

$$\varphi = k\sum_{i=1}^{n}\frac{Q_i}{r_i}. \quad (4.10)$$

Формула (4.9) говорит о потенциальности электрического поля, создаваемого системой зарядов. А формула (4.10) при ее сравнении с (4.7) говорит о том, что потенциал поля, создаваемого системой точечных зарядов, равен алгебраической сумме потенциалов полей, создаваемых каждым из зарядов в отдельности:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n}\varphi_i. \quad (4.11)$$

При расчете электрических полей вычисление потенциалов оказывается обычно значительно проще, чем вычисление их напряженностей, так как последние при наложении полей складываются векторно.

Для полей, создаваемых системой зарядов, справедлива формула (4.8). Однако в ней потенциалы φ_1 и φ_2 создаются системами зарядов, а не единичным зарядом. Если заряд q из точки с потенциалом φ удаляется на бесконечность (где по определению потенциал равен нулю), работа сил поля равна

$$A_\infty = q\varphi. \quad (4.12)$$

В таком случае потенциал электрического поля можно определить как физическую величину численно равную работе, которую совершают силы поля над единичным положительным зарядом при удалении его из данной точки на бесконечность. За единицу измерения потенциала принимают потенциал в такой точке поля, для перемещения в которую из бесконечности единичного положительного заряда необходимо совершить работу, равную единице. В системе СИ за единицу измерения потенциала принимается потенциал в такой точке, для перемещения в которую из бесконечности заряда в 1 кулон, необходимо совершить работу в 1 джоуль. Эта единица называется вольтом в честь итальянского физика и физиолога Алессандро Вольта (1745–1827) – одного из основателей учения об электричестве:

$$1\hat{A} = \frac{1\ddot{A}æ}{1\hat{E}ë}.$$

4.4. Потенциал поля диполя

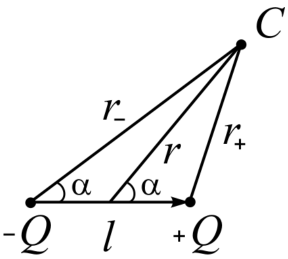

Рис. 4.3

Согласно формулам (4.11) и (4.7) можно определить потенциал поля диполя в любой точке пространства *C* на расстоянии *r* от центра диполя (рис. 4.3):

$$\varphi = k\frac{Q}{r_+} - k\frac{Q}{r_-} = kQ\left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right) = kQ\frac{r_- - r_+}{r_+ r_{-_+}}.$$

При условии, что $l \prec\prec r \;\; r_+ r_- \approx r^2$, а $r_- - r_+ = l\cos\alpha$ для расчета потенциала получается формула

$$\varphi = k\frac{Ql\cos\alpha}{r^2} = k\frac{P\cos\alpha}{r^2} = \frac{P\cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, \qquad (4.13)$$

где α – угол между направлением момента диполя $\vec{P}$ и радиус-вектором $\vec{r}$, проведенным со средины диполя в пункт наблюдения.

4.5. Связь потенциала и напряженности электрического поля

Элементарную работу по перемещению силами поля точечного заряда q вдоль произвольного направления l на элементарном участке пути dl можно представить согласно (4.2)

$$dA = qE_l dl.$$

С другой стороны эта же работа согласно (4.8):

$$dA = q\big(\varphi - (\varphi + d\varphi)\big) = -q\,d\varphi. \qquad (4.14)$$

Откуда

$$E_l dl = -d\varphi$$

и

$$E_l = -\frac{d\varphi}{dl}. \qquad (4.15)$$

Из (4.15) следует, что проекция вектора напряженности электрического поля на произвольное направление равна скорости уменьшения потенциала в этом направлении.

Поскольку аналитическую зависимость электрического потенциала можно задать уравнением $\varphi = f(x, y, z)$, то проекции вектора напряженности на оси координат имеют вид:

$$E_x = -\frac{d\varphi}{dx},\ E_y = -\frac{d\varphi}{dy},\ E_z = -\frac{d\varphi}{dz}. \tag{4.16}$$

Его модуль можно определить по формуле

$$E = \sqrt{E_x{}^2 + E_y{}^2 + E_z{}^2} = \sqrt{\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2},$$

а сам вектор

$$\bar{E} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k} = -\left(\frac{d\varphi}{dx}\vec{i} + \frac{d\varphi}{dy}\vec{j} + \frac{d\varphi}{dz}\vec{k}\right).$$

Согласно определению выражение в скобках представляет собой градиент функции φ:

$$E = -grad\varphi, \tag{4.17}$$

или ***напряженность электрического поля равна градиенту его электрического потенциала, взятого с обратным знаком***.

Таким образом, если известно распределение потенциала $\varphi = f(x, y, z)$ в какой то среде, то дифференцированием его по координатам можно определить напряженность электрического поля. Обратная задача решается путем интегрирования (4.16) и (4.17).

4.6. Эквипотенциальные линии и поверхности

Воображаемая поверхность (или линия), все точки которой имеют одинаковый потенциал, называется *эквипотенциальной поверхностью (линией)*. При перемещении вдоль эквипотенциальной поверхности потенциал не изменяется. Следовательно, согласно (4.15), составляющая вектора напряженности, касательная к силовой линии, равна нулю

$$\frac{d\varphi}{dl} = E_l = 0.$$

А это означает, что вектор напряженности, а следовательно, и силовые линии в любой точке перпендикулярны к эквипотенциальным поверхностям.

Эквипотенциальную поверхность можно провести через любую точку поля, и таких поверхностей может быть бесконечно много. Если, проводить эквипотенциальные поверхности таким образом, чтобы разность потенциалов между двумя соседними поверхностями была величиной постоянной, то по их густоте можно

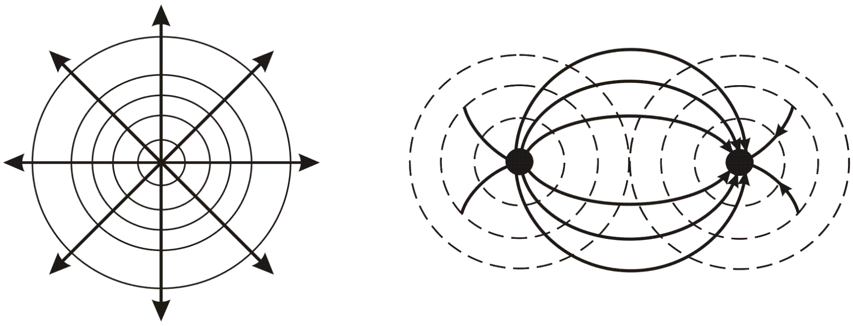

Рис. 4.4

судить о картине электрического поля. На рис. 4.4 представлены силовые линии и эквипотенциальные поверхности для полей точечного заряда и диполя. Поскольку эти поля неоднородные, то их густота при приближении к зарядам увеличивается. Для однородного поля эквипотенциальные поверхности – расположенные на одинаковом расстоянии друг от друга плоскости.