Лекция 9
Энергия электрического поля

Вопросы. *Энергия системы неподвижных точечных зарядов. Энергия заряженных проводников. Энергия заряженного конденсатора. Энергия и плотность энергии электрического поля.*

9.1. Энергия системы точечных зарядов

Для образования любой системы заряженных тел необходимо совершить работу, так как заряды взаимодействуют между собой по закону Кулона. Эта работа должна быть совершена какими-либо внешними силами и согласно закону сохранения энергии должна равняться изменению энергии системы. Если же определить работу по переносу зарядов из бесконечности в заданные точки пространства, то она и будет составлять энергию образованной системы. Для примера определим работу, которую необходимо совершить, чтобы создать систему из трех точечных зарядов q_1, q_2, q_3, которые необходимо расположить в точках *1*, *2*, *3* (рис. 9.1). Расстояние между точками обозначим через: r_{12} – расстояние между зарядами q_1 и q_2; r_{13} – расстояние между зарядами q_1 и q_3; r_{23} – расстояние между зарядами q_2 и q_3. Очевидно, что $r_{12} = r_{21}$, $r_{13} = r_{31}$, $r_{23} = r_{32}$, или в общем виде $r_{ik} = r_{ki}$.

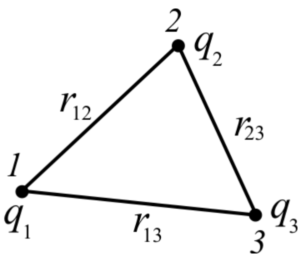

Рис. 9.1

Работа по переносу зарядов не зависит от порядка их переноса. Перенесем сразу заряд q_1 из бесконечности в точку *1*. Работа по этому переносу равняется нулю, так как на данный момент электрическое поле в выбранной точке пространства отсутствует:

$$A_1 = 0.$$

Работа по перемещению заряда q_2 равна произведению его величины на разность потенциалов поля в точке *2* и на бесконечности. Потенциал на бесконечности равен нулю, а в точке *2* он целиком определяется зарядом q_1.

$$A_2 = q_2\left(\varphi_2 - \varphi_\infty\right) = q_2\varphi_2 = k\frac{q_1 q_2}{r_{12}}.$$

Для переноса заряда q_3 в точку *3* необходимо выполнить работу против сил поля, созданного уже двумя зарядами q_1 и q_2:

$$A_3 = q_3\left(\varphi_3 - \varphi_\infty\right) = q_3\varphi_3 = q_3\left(k\frac{q_1}{r_{13}} + k\frac{q_2}{r_{23}}\right) = k\left(\frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}})\right),$$

где $k\dfrac{q_1}{r_{13}}$ – потенциал, создаваемый в точке *3* зарядом q_1; $k\dfrac{q_2}{r_{23}}$ – потенциал, создаваемый в точке *3* зарядом q_2.

Сумма этих работ и есть энергия системы, состоящей из трех точечных зарядов:

$$W = A_1 + A_2 + A_3 = k\left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}}\right). \tag{9.1}$$

Для вывода уравнения энергии формулу (9.1) представим в симметричном виде:

$$W = \frac{1}{2}k\left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_2 q_1}{r_{21}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_3 q_1}{r_{31}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} + \frac{q_3 q_2}{r_{32}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}k\left[q_1\left(\frac{q_2}{r_{12}} + \frac{q_3}{r_{13}}\right) + q_2\left(\frac{q_1}{r_{21}} + \frac{q_3}{r_{23}}\right) + q_3\left(\frac{q_1}{r_{31}} + \frac{q_2}{r_{32}}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(q_1\varphi_1 + q_2\varphi_2 + q_3\varphi_3\right), \tag{9.2}$$

Для системы из *n* точечных зарядов формула (9.2) имеет вид:

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i\varphi_i, \tag{9.3}$$

где φ_i – потенциал электрического поля, создаваемый в данной точке всеми зарядами, кроме заряда q_i, который находится в данной точке. Например, в приведенной задаче φ_1 – потенциал созданный в точке *1* зарядами q_2 и q_3.

Энергия системы зарядов носит характер потенциальной энергии. Устойчивому состоянию любой системы соответствует минимум потенциальной энергии. Энергия любой пары зарядов q_i и q_k выражается членом вида $\dfrac{1}{2}\dfrac{q_i q_k}{r_{ik}}$. Для одноименных зарядов это выражение положительно и непрерывно убывает по мере возрастания расстояния между зарядами r_{ik}. Это соответствует тому факту, что два одноименных заряда отталкиваются друг от друга, пока не разлетятся на бесконечно большое расстояние. Для разноименных зарядов это выражение отрицательно и непрерывно убывает по мере их сближения. Два разноименные заряды притягиваются друг к другу, пока не сольются и частично или полностью не нейтрализуют друг друга. Этот вывод распространяется и на любое количество зарядов. Следовательно, не может быть устойчивой статичной конфигурации электрических зарядов.

9.2. Энергия заряженных проводников

Энергия уединенного проводника. Заряд проводника Q, который согласно теореме Гаусса сосредоточен на его поверхности, можно рассматривать как систему точечных зарядов q_i. Поэтому для вычисления энергии уединенного проводника используем формулу (9.3). При этом учтем, что поверхность проводника является эквипотенциальной и, следовательно, потенциал во всех точках, где находятся точечные заряды q_i, равен φ.

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i\varphi = \frac{1}{2}\varphi\sum_{i=1}^{n} q_i = \frac{1}{2}Q\varphi. \qquad (9.4)$$

Учитывая, что $Q = C\varphi$ Энергию можно представить:

$$W = \frac{1}{2}Q\varphi = \frac{1}{2}C\varphi^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}. \qquad (9.5)$$

Энергия системы заряженных проводников. Потенциал проводника, находящегося в электрическом поле, созданным другими проводниками, зависит не только от величины собственного заряда, но и от зарядов на других проводниках. Но в любом случае его поверхность является эквипотенциальной. Следовательно, в любой точке проводника потенциал имеет одно и тоже значение. Поэтому для любой системы, состоящей из *n* заряженных проводников с потенциалами φ_1, φ_2, …, φ_n и зарядами Q_1, Q_2, …, Q_n (рис. 9.2) энергия рассчитывается с применением формулы (9.4):

$$W = \sum_{b=1}^{n} W_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} Q_i\varphi_i. \qquad (9.6)$$

Формулы для расчета энергии системы точечных зарядов (9.3) и для расчета энергии системы заряженных проводников (9.6) очень похожи, однако:

- в (9.3) φ_i – потенциал поля, созданного всеми зарядами, кроме q_i;
- в (9.6) φ_i – потенциал поля, созданного зарядами всех проводников, включая и Q_i.

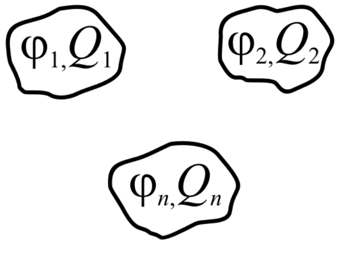

Рис. 9.2

Соответственно, (9.3) выражает энергию взаимодействия точечных зарядов, а (9.6) – полную энергию системы.

Энергия заряженного конденсатора. Конденсатор по определению представляет собой систему, состоящую из двух проводников с одинаковыми по величине и противоположными по знаку зарядами $+Q$ и $-Q$, а также потенциалами φ_1 и φ_2. Согласно (9.6) энергия конденсатора равна:

$$W = \frac{Q\varphi_1}{2} - \frac{Q\varphi_2}{2} = Q\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} = \frac{QU}{2},$$

где U – разность потенциалов между обкладками конденсатора. С учетом того, что $Q = CU$

$$W = \frac{QU}{2} = \frac{CU^2}{2} = \frac{Q^2}{2C}. \tag{9.7}$$

9.3. Энергия электрического поля

Заряженные проводники, заряженные конденсаторы соответственно формулам (9.5) и (9.7) обладают энергией. Однако сразу же возникает вопрос о местонахождении этой энергии. Если это энергия плоского конденсатора, то, возможно, она находится на его обкладках, это значит на электрических зарядах. В принципе это соответствует формулам (9.3), (9.5), (9.7). Но с другой стороны внутри проводника поле отсутствует, зато она есть за его пределами. Есть основание думать, что энергия сосредоточена в электрических полях, которые создают заряженные тела. Для конденсатора это пространство между обкладками конденсатора.

На самом деле только опыт может дать ответ на поставленный вопрос. Решить его в рамках электростатики не представляется возможным. В электростатическом поле невозможно отделить заряд от поля: если есть электрический заряд, то должно быть и, созданное им, электростатическое поле. Если есть поле, то должен быть и заряд его создавший. Получить такие опытные данные, возможно только изучая электрические поля, переменные во времени. Такие поля существуют. Существуют электромагнитные волны, которые представляют собой электрические и магнитные поля, меняющиеся со временем и распространяющиеся в пространстве с определенной скоростью. Электромагнитные поля существуют самостоятельно. Заряды, которые их создали, могут нейтрализоваться, прекратить существование, а волны будут распространяться в пространстве и переносить энергию. В этом мы ежедневно убеждаемся, когда включаем радиоприемник, телевизор, пользуемся мобильным телефоном и т. д. Поскольку электростатическое поле – частный случай электромагнитного поля, то можно утверждать: энергия сконцентрирована в электростатическом поле, а не в зарядах.

Выражение для расчета этой энергии получим, исследуя однородное электростатическое поле плоского конденсатора. Его электроемкость определяется формулой

$$\tilde{N} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}.$$

Подставив это выражение в 9.7, получим:

$$W = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S U^2}{2d}.$$

Модуль вектора напряженности электрического поля конденсатора и разность потенциалов между его обкладками связаны известным выражением:

$$E = \frac{U}{d}.$$

Тогда энергия поля конденсатора

$$W = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 S d E^2, \qquad (9.8)$$

где $Sd = V$ – объем пространства, в котором сосредоточено поле.

Определим *плотность энергии электрического поля*, как физическую величину численно равную энергии электрического поля, сосредоточенного в единице объема пространства:

$$\omega = \frac{W}{V} = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 E^2. \qquad (9.9)$$

Учитывая связь вектора электрического смещения и вектора напряженности электрического поля $D = \varepsilon\varepsilon_0 E$, для плотности энергии получим:

$$\omega = \frac{W}{V} = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 E^2 = \frac{D^2}{2\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{ED}{2}. \qquad (9.10)$$

Формула (9.10) справедлива для расчета энергии однородных электрических полей. Для расчета энергии неоднородного поля, объем в котором оно сосредоточено, необходимо разбить на элементарные объемы dV, в которых поле можно считать однородным, и, используя (9.10) проинтегрировать по всему объему:

$$W = \int_V \omega\, dV = \frac{1}{2}\int_V \varepsilon\varepsilon_0 E^2\, dV = \frac{1}{2}\int_V DE\, dV = \frac{1}{2}\int_V \frac{D^2}{\varepsilon\varepsilon_0} dV. \qquad (9.11)$$

Если проанализировать выражение (9.9) и, связанные с ним (9.10), (9.11), то можно заметить, что энергия электрического поля с одинаковой напряженностью в диэлектрике в ε раз больше, чем в вакууме. Объясняется это тем, что часть энергии при создании поля расходуется на поляризацию диэлектрика. Из этих рассуждений можно определить энергию, необходимую для поляризации единицы объема диэлектрика.

$$\Delta\omega = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 E^2 - \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}(\varepsilon - 1)\varepsilon_0 E^2. \qquad (9.12)$$