Лекции по механике

Тема 2. Динамика материальной точки и твердого тела

§ 2.1. Основные понятия и величины динамики. Законы Ньютона. Инерциальные системы отсчета (ИСО).

Динамика (от греческого слова dynamis – сила) – раздел механики, в котором изучается движение тел как результат их взаимодействия.

Основные задачи динамики: выяснить причины, вызывающие и изменяющие состояние движения или покоя, а также установить количественные зависимости кинематических характеристик от этих причин.

Наблюдения показывают, что состояние движения тела можно изменить только в результате его взаимодействия с другими телами. Важной величиной динамики является сила – количественная мера взаимодействия тел, в результате которого они изменяют состояние своего движения (динамическое проявление силы) или деформируются (статическое проявление силы) или имеет место и то и другое одновременно. Отсюда два способа измерения силы:

1) путем сравнения ускорений \vec{a}

2) динамометром по деформации.

Сила характеризуется 1) величиной 2) направлением 3) точкой приложения.

Сила

называется равнодействующей силой.

Единицей измерения силы в системе СИ является 1 Ньютон: [F] = 1H

В книге "Математические основы натуральной философии" в 1686 г. И. Ньютоном были сформулированы законы динамики.

Первый закон Ньютона:

Существуют такие системы отсчета (СО), их называют инерциальными системами отсчета (ИСО), относительно которых м. т. сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения, если на нее не действуют другие тела или действие других тел взаимно компенсируется (

ИСО может быть бесконечное множество (∞), т. к. любая СО, которая покоится или движется равномерно и прямолинейно относительно некоторой ИСО, также является *инерциальной*. Явление сохранения телами состояния покоя или равномерного прямолинейного движения называется инерцией. Первый закон Ньютона еще называют законом инерции. Из первого закона Ньютона следует, что для того, чтобы тело сохраняло состояние покоя или равномерного прямолинейного движения (двигалось по инерции), не нужно никаких причин – это естественное состояние, свойственное любому телу, если на него не действуют силы или их действие скомпенсировано. Только внешняя причина — cuna — может изменить такое состояние, т. е. сообщить ускорение телу:

Второй закон Ньютона: ускорение , приобретаемое телом под действием результирующей всех внешних сил , прямо пропорционально силе () и обратно пропорционально массе тела (

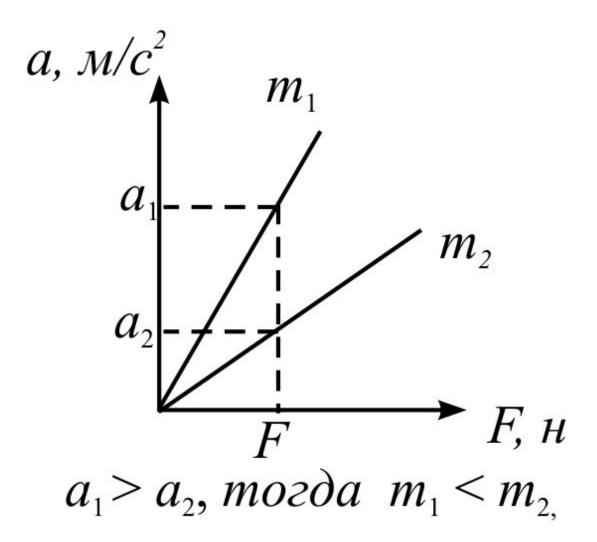
Ускорение сонаправлено с результирующей всех внешних сил: . Второй закон Ньютона можно записать:

(2.2')

(2.2**)**

(2.1)

Зависимости ускорения от и от представлены на рисунке 2.1



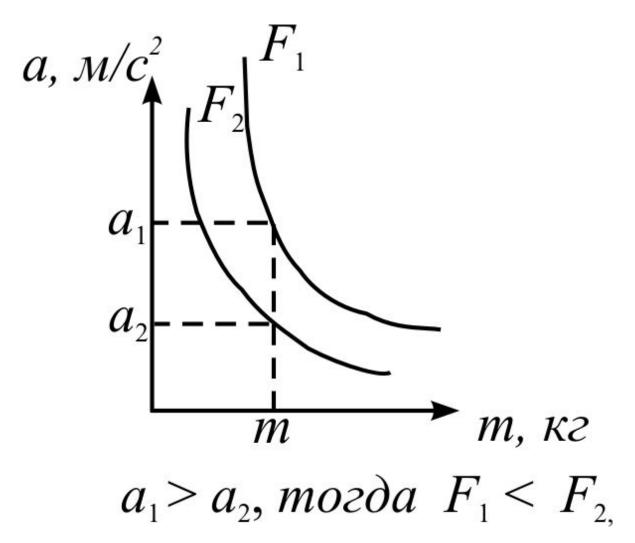


Рис. 2.1

Macca – количественная мера инертных и гравитационных свойств тела. В системе СИ единицей измерения массы является:

Инертность – свойство тела противиться попыткам изменить его состояние движения. Чем больше инертность тела, тем больше его масса, тем меньше ускорение, приобретенное телом и наоборот:

(2. 3**)**

Масса также характеризует способность тел взаимодействовать (притягиваться) с другими телами в соответствии с законом всемирного тяготения: сила притяжения двух материальных точек с массами прямо пропорциональна произведению их масс и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними.

(2. 4**)**,

- гравитационная постоянная.

Свойства массы:

1) аддитивна:

2) не зависит от рода взаимодействия

3) изменяется при скорости движения , близкой к скорости света по формуле:

Выражения справедливы только для м. т. постоянной массы.

Наиболее общая формулировка второго закона Ньютона следующая: быстрота изменения импульса тела равна результирующей всех внешних сил, действующих на тело:

(2.5),

- импульс тела – произведение массы тела на скорость . Т. к.

(2.6)

- импульс силы.

Тогда выражение (2.6) читается так: изменение импульса тела равно импульсу силы. Это наиболее общая формулировка II закона Ньютона.

Третий закон Ньютона: силы, с которыми действуют друг на друга взаимодействующие тела, равны по величине и противоположны по направлению:

§ Силы в механике самостоятельно!

Силы: $m \cdot \vec{g}$ - гравитационная сила, закон всемирного тяготения.

 \vec{F}_{mp} В механике: \vec{F}_{mp} - электромагнитные силы.

§ 2.2. Система материальных точек. Силы внешние и внутренние. Движение центра масс.

(2.7)

На практике зачастую приходится изучать движение совокупности взаимодействующих (связанных) между собой тел, т. е. движение так называемой механической системы (МС).

Примеры механической системы: Солнце с планетами, любая машина, поезд с вагонами и т. д. Если формой, размерами и внутренней структурой тел, составляющих МС, можно пренебречь, то мы имеем дело с *системой материальных точек*.

Силы, действующие между телами (м. т.), составляющими систему, называются внутренними, обозначим их :

i - обозначает тело, на которое действует сила;

j - обозначает тело, со стороны которого действует сила.

Силы, действующие на тела системы со стороны других тел, не входящих в систему, называются внешними, их обозначим

Исследовать движение системы, записав законы Ньютона для каждой точки системы и решив полученную систему, сложно. Поэтому вводится понятие центра масс. *Центр масс* (Ц. М.) системы м. т., массы которых $m_1, m_2, ..., m_N$ - некая точка пространства, положение которой относительно начала координат определяется радиус-вектором :

где - радиус-вектор й м. т. относительно начала координат;

где - радиус-вектор и м. т. относительно начала координат; или координатами:

(2.9)
Для тел, находящихся в однородном гравитационном поле, положение центра масс и центра тяжести (точки приложения равнодействующей гравитационных сил, действующих на отдельные части системы) совпадают.

В процессе движения материальных точек их радиус-векторы , а следовательно, и радиус-вектор центра масс будут изменяться. Первая производная от по времени дает скорость перемещения центра масс (из (2,8)):

или ,

где - масса системы.

Так как - импульс первого тела системы,

- импульс второго тела системы,

- импульс N-го тела системы,

(2.10)

где - полный импульс системы. Из (2.10) имеем:

(2.11)

где - скорость движения центра масс механической системы.

Из (2.11) следует, что импульс центра масс механической системы равен полному импульсу этой системы, т. е. сумме импульсов всех м. т. системы. Дифференцируя (2.11) еще раз по времени, получим:

(2.12) - закон динамики или движения центра масс механической системы: центр масс механической системы движется так, как будто в нем сконцентрирована вся масса системы и к нему приложены все внешние силы.

§ 2.3. Замкнутые системы. Закон сохранения импульса замкнутой механической системы.

Система называется замкнутой (изолированной), если внешние силы отсутствуют или их действие скомпенсировано () Из определения следует, что для замкнутой механической системы (МС) выполняется:

т. е. *центр масс замкнутой МС находится в покое или движется равномерно и прямолинейно*. Тогда из (2.13) имеем:

(2.14) (2.15) - закон сохранения импульса замкнутой механической системы: *импульс замкнутой МС остается постоянным при любых взаимодействиях внутри системы*. Или

Применение закона сохранения импульса (бешеные огурцы).

§ 2.4. Твердое тело как система материальных точек. Основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела.

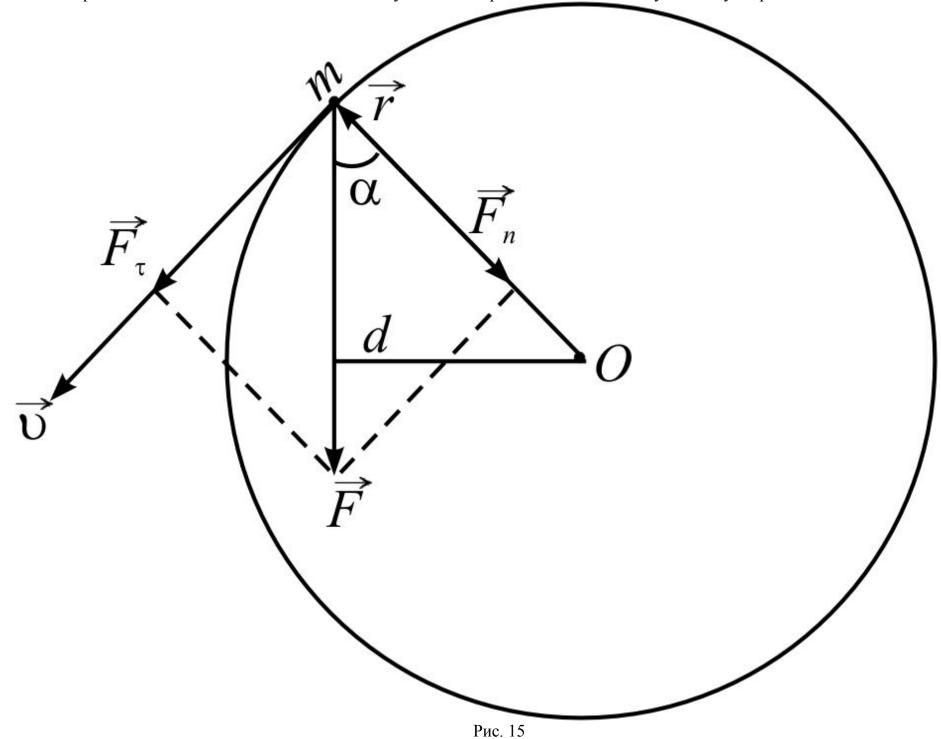
Абсолютно твердое тело (а. т. т.) – тело, взаимное расположение частиц которого остается неизменным при любых движениях (недеформированное т. т.).

Рассматривая а. т. т как систему жестко связанных между собой м. т., имеющих при поступательном движении одинаковые ускорения , можно использовать выражения (2.12) и (2.13) для описания поступательного движения

а. т. т.

Рис. 3

В динамике вращательного движения тела важную роль в эффекте действия силы играет не только ее величина, но и то, где приложена эта сила. В случае вращения а. т. т произвольной формы под действием силы неподвижной оси OO', все его точки описывают окружности с центрами на этой оси и имеют одинаковые угловые скорости и одинаковые угловые ускорения.



Рассмотрим движение одной м. т. массой по окружности радиусом под действием силы (рис. 15). Разложим силу на две составляющие ускорения материальной точке не сообщает, так . Составляющая как она проходит через ось (т. .). Тангенциальная составляющая силы сообщает м. т. массой тангенциальное ускорение , определяемое по второму закону Ньютона как:

(2.16**)** Используя связь тангенциального ускорения с угловым ускорением : , (2.17) запишем в виде: (2.17').Умножим обе части (2.17') на , получим: (2.17)Правая часть (2.18): (2.18)- плечо силы – кратчайшее расстояние от т. до линии действия силы, - момент силы относительно т. Единица измерения момента силы в системе СИ -Величина, равная произведению массы м. т. на квадрат расстояния от нее до оси вращения (т.), называется моментом инерции точки относительно этой оси: (2.19)В системе СИ единица измерения момента инерции точки относительно оси -Учитывая (2.19) и (2.20), выражение (2.18) примет вид: (2.21),которое является уравнением динамики вращательного движения материальной точки. Просуммировав (2.21) по всем материальным точкам а. т. т с учетом того, что , получим: (2.22)ИЛИ (2.20),

-- результирующий момент всех внешних сил относительно неподвижной оси, а - момент инерции тела относительно той же оси. где

(2.23) – основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела: угловое ускорение , приобретаемое твердым телом относительно неподвижной оси, прямо пропорционально результирующему моменту всех и обратно пропорционально моменту инерции тела относительно той же оси.

Из (2.23) следует, что вектор углового ускорения и вектор результирующего момента всех внешних сил относительно неподвижной оси сонаправлены:

, т. е. момент инерции характеризует инерционные свойства тела при вращательном движении, подобно, как масса характеризует инерционные свойства тела при поступательном движении. тела относительно оси вращения Однако в отличие от массы момент инерции данного тела может иметь множество значений в соответствии с множеством возможных осей вращения.

В динамике вращательного движения

роль выполняет

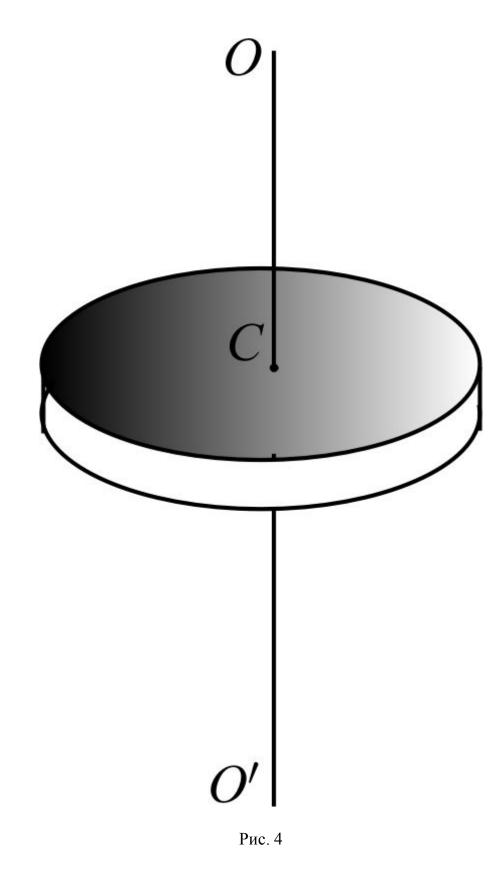
роль выполняет

роль выполняет Моменты инерции различных тел рассчитаны для:

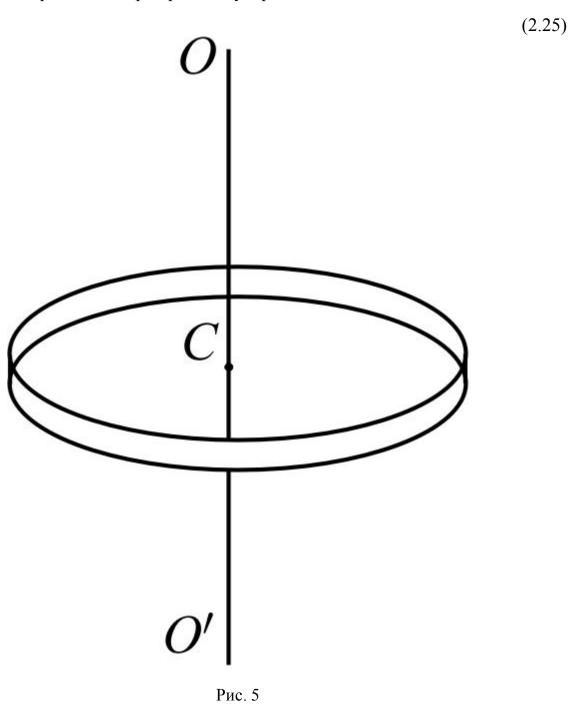
1) сплошного диска (цилиндра) радиусом , массой относительно оси, проходящей через его центр:

(2.21)

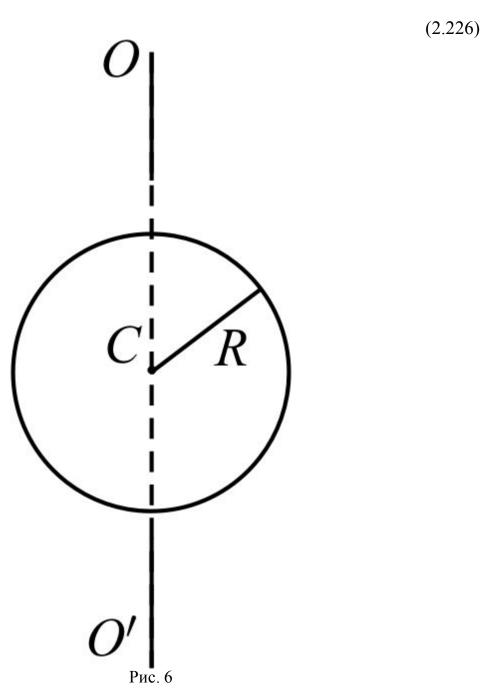
. Угловое ускорение обратно пропорционально моменту инерции



2) тонкого обруча (кольца) радиусом и массой относительно оси, проходящей через его центр перпендикулярно его плоскости:



3) шара радиусом и массой относительно оси, совпадающей с одним из его диаметров:



4). момент инерции тонкого стержня массой и длиной относительно оси, проходящей через его середину:

(2. 237)

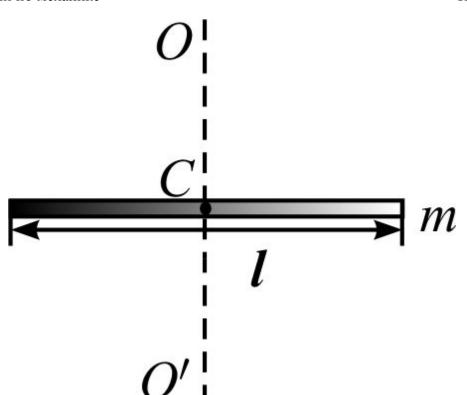


Рис. 7и. т. д.

Если известен момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс J_c , то момент инерции относительно любой другой оси, параллельной первой, может быть найден на основании так называемой теоремы Штейнера-Гюйгенса: момент инерции тела J относительно любой оси равен моменту инерции тела J относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс тела плюс произведение массы тела J на квадрат расстояния J между осями:

(2.28)

§ 2.5. Уравнение моментов. Закон сохранения момента импульса.

Из основного уравнения динамики вращающегося тела (2.23) (или , где	относительно данной оси/точки) и с учетом того, что мгновенное угловое ускорение	следует:
или			
		(2. 24)	
Обозначим произведение:			
	THE TOTAL	(2.30)	
и назовем его <i>моментом импульса</i> тела относительно данной оси из	пи точки.		
Единица измерения момента импульса относительно данной оси/то (2.29) с учетом (2.30) запишется как	чки в системе СИ:		
		(2.31)	
и представляет собой уравнение моментов: быстрота изменения м	омента импульса тела отно	осительно некоторой оси равна результирующему моменту всех внешних сил, приложенных	к телу, относительно той же оси.
Если суммарный момент внешних сил , т. е. система замкнут	ая, то момент импульса сист	темы, как следует из (2.31), остается постоянным, т. е.:	
(2.32) – закон сохранения момента импульса, который может быть з	записан спелующим образом	(2.32)	
	•	(2.32')	N 77
Демонстрацией закона сохранения момента импульса служат опыт	гы со скамьей Жуковского	(металлическая платформа, вращающаяся относительно вертикальной оси с малым трение	м). Человек с гантелями садится на нее,
. Разлвигая руки с гантелями или прижимая их к груди (т. е. меня	я момент инершии системы)), можно изменить угловую скорость врашения.	

. Раздвигая руки с гантелями или прижимая их к груди (т. е. меняя момент инерции системы), можно изменить угловую скорость вращения. Фигурист на коньках или балерина поступают аналогичным образом, желая изменить частоту вращения.

Каждая элементарная частица (,) обладает собственным моментом импульса. Сумма этих моментов сохраняется, например, при ядерных реакциях, которые сопровождаются превращением одних элементарных частиц в другие.