

(2.7)

§ Силы в механике самостоятельно!

Силы: $m \cdot \vec{g}$ - гравитационная сила, закон всемирного тяготения.

В механике: $\left. \begin{matrix} \vec{F}_{\text{упр}} \\ \vec{F}_{\text{мп}} \end{matrix} \right\}$ - электромагнитные силы.

§ 2.2. Система материальных точек. Силы внешние и внутренние. Движение центра масс.

На практике зачастую приходится изучать движение совокупности взаимодействующих (связанных) между собой тел, т. е. движение так называемой *механической системы* (МС).

Примеры механической системы: Солнце с планетами, любая машина, поезд с вагонами и т. д.

Если формой, размерами и внутренней структурой тел, составляющих МС, можно пренебречь, то мы имеем дело с *системой материальных точек*.

Силы, действующие между телами (м. т.), составляющими систему, называются *внутренними*, обозначим их $\vec{F}_{ij}$:

i - обозначает тело, на которое действует сила;

j - обозначает тело, со стороны которого действует сила.

Силы, действующие на тела системы со стороны других тел, не входящих в систему, называются *внешними*, их обозначим $\vec{F}_i$.

Исследовать движение системы, записав законы Ньютона для каждой точки системы и решив полученную систему, сложно. Поэтому вводится понятие центра масс. *Центр масс* (Ц. М.) системы M м. т., массы которых

$m_1, m_2, \dots, m_N$ - некая точка пространства, положение которой относительно начала координат определяется радиус-вектором $\vec{R}$:

(2.8)

где $\vec{r}_i$ - радиус-вектор i -й м. т. относительно начала координат; или координатами:

(2.9)

Для тел, находящихся в однородном гравитационном поле, положение центра масс и центра тяжести (точки приложения равнодействующей гравитационных сил, действующих на отдельные части системы) совпадают.

В процессе движения материальных точек их радиус-векторы $\vec{r}_i$, а следовательно, и радиус-вектор центра масс $\vec{R}$ будут изменяться. Первая производная от $\vec{R}$ по времени дает скорость перемещения центра масс (из (2,8)):

или
$$\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt},$$

где M - масса системы.

Так как $\vec{p}_1$ - импульс первого тела системы,

$\vec{p}_2$ - импульс второго тела системы,

$\vec{p}_N$ - импульс N-го тела системы,

то

(2.10)

где $\vec{P}$ - полный импульс системы.

Из (2.10) имеем:

(2.11)

где $\vec{V}$ - скорость движения центра масс механической системы.

Из (2.11) следует, что *импульс центра масс механической системы равен полному импульсу этой системы, т. е. сумме импульсов всех м. т. системы.*

Дифференцируя (2.11) еще раз по времени, получим:

(2.12)

(2.12) - закон динамики или движения центра масс механической системы: *центр масс механической системы движется так, как будто в нем сконцентрирована вся масса системы и к нему приложены все внешние силы.*

§ 2.3. Замкнутые системы. Закон сохранения импульса замкнутой механической системы.

Система называется замкнутой (изолированной), если внешние силы отсутствуют или их действие скомпенсировано ($\sum \vec{F}_{\text{внеш}} = 0$)

Из определения следует, что для замкнутой механической системы (МС) выполняется:

$$\vec{P} = \text{const}$$

(2.13)

т. е. *центр масс замкнутой МС находится в покое или движется равномерно и прямолинейно.*

Тогда из (2.13) имеем:

(2.14)

(2.15) - закон сохранения импульса замкнутой механической системы: *импульс замкнутой МС остается постоянным при любых взаимодействиях внутри системы.* Или

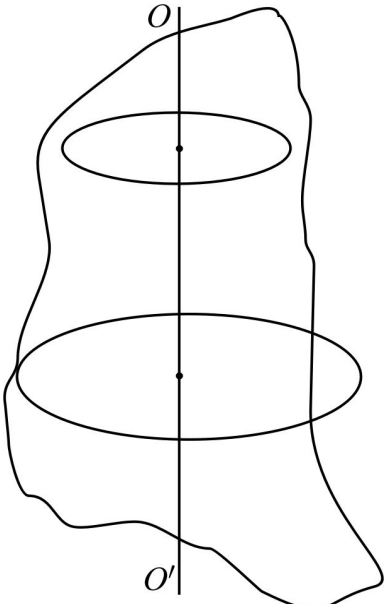
(2.15)

Применение закона сохранения импульса (бешеные огурцы).

§ 2.4. Твердое тело как система материальных точек. Основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела.

Абсолютно твердое тело (а. т. т.) – тело, взаимное расположение частиц которого остается неизменным при любых движениях (недеформированное т. т.).

Рассматривая а. т. т как систему жестко связанных между собой м. т., имеющих при поступательном движении одинаковые ускорения $\vec{a}$, можно использовать выражения (2.12) и (2.13) для описания поступательного движения а. т. т.



В динамике вращательного движения тела важную роль в эффекте действия силы играет не только ее величина, но и то, где приложена эта сила. В случае вращения а. т. т произвольной формы под действием силы $\vec{F}$ вокруг неподвижной оси OO' , все его точки описывают окружности с центрами на этой оси и имеют одинаковые угловые скорости и одинаковые угловые ускорения.

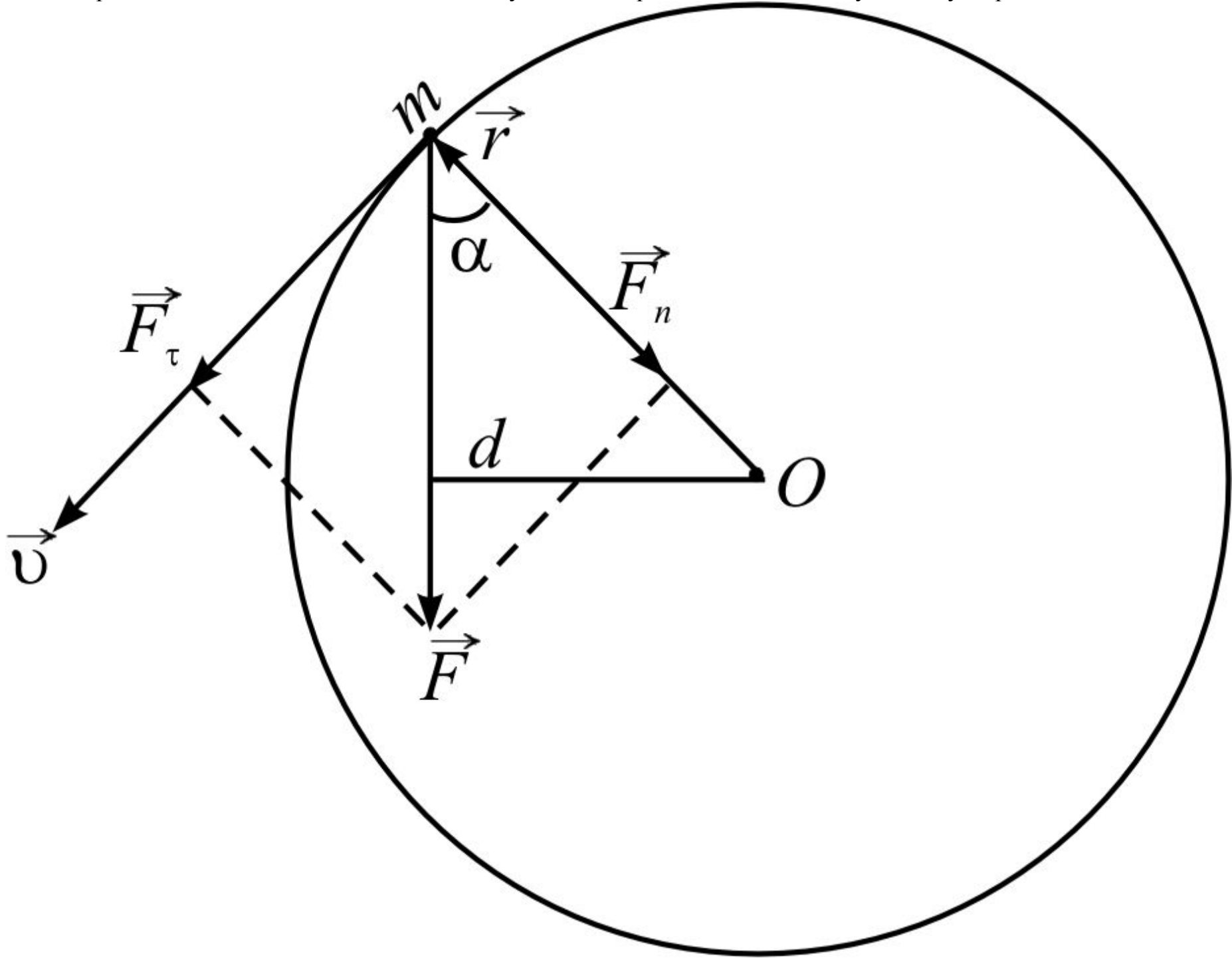


Рис. 15

Рассмотрим движение одной м. т. массой m по окружности радиусом r под действием силы $\vec{F}$ (рис. 15). Разложим силу $\vec{F}$ на две составляющие $\vec{F}_\tau$ и $\vec{F}_n$. Составляющая $\vec{F}_n$ ускорения материальной точке не сообщает, так как она проходит через ось (т. е. O). Тангенциальная составляющая силы $\vec{F}_\tau$ сообщает м. т. массой m тангенциальное ускорение a_τ , определяемое по второму закону Ньютона как:

$$F_\tau = ma_\tau \tag{2.16}$$

Используя связь тангенциального ускорения a_τ с угловым ускорением α : $a_\tau = r\alpha$, (2.17) запишем в виде:

$$F_\tau = mr\alpha \tag{2.17'}$$

Умножим обе части (2.17') на r , получим:

$$F_\tau r = mr^2\alpha \tag{2.17''}$$

Правая часть (2.18):

$$mr^2\alpha \tag{2.18}$$

где mr^2 - *момент силы* относительно т. O (или O'), где r - плечо силы – кратчайшее расстояние от т. O до линии действия силы, α - угловое ускорение).

Единица измерения момента силы в системе СИ - $\text{Н}\cdot\text{м}$.

Величина, равная произведению массы м. т. на квадрат расстояния от нее до оси вращения (т. е. r^2), называется *моментом инерции* точки относительно этой оси:

$$J_O = mr^2 \tag{2.19}$$

В системе СИ единица измерения момента инерции точки относительно оси - $\text{кг}\cdot\text{м}^2$.

Учитывая (2.19) и (2.20), выражение (2.18) примет вид:

$$J_O\alpha = F_\tau r \tag{2.21}$$

которое является уравнением динамики вращательного движения материальной точки.

Просуммировав (2.21) по всем материальным точкам а. т. т с учетом того, что α одинаково для всех точек, получим:

$$J_O\alpha = \sum F_\tau r \tag{2.22}$$

или

$$J_O\alpha = M \tag{2.20}$$

где $\sum F_\tau r$ -- результирующий момент всех внешних сил относительно неподвижной оси, а J_O - момент инерции тела относительно той же оси.

(2.23) – *основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела*: угловое ускорение α , приобретаемое твердым телом относительно неподвижной оси, прямо пропорционально результирующему моменту всех внешних сил M и обратно пропорционально моменту инерции тела J_O относительно той же оси.

Из (2.23) следует, что вектор углового ускорения и вектор результирующего момента всех внешних сил относительно неподвижной оси сонаправлены: $\vec{M} = J_O\vec{\alpha}$. Угловое ускорение α обратно пропорционально моменту инерции

тела относительно оси вращения O , т. е. момент инерции J_O характеризует инерционные свойства тела при вращательном движении, подобно, как масса характеризует инерционные свойства тела при поступательном движении.

Однако в отличие от массы момент инерции J_O данного тела может иметь множество значений в соответствии с множеством возможных осей вращения.

В динамике вращательного движения

роль $\vec{F}_\tau$ выполняет

роль $\vec{F}_n$ выполняет

роль $\vec{v}$ выполняет

Моменты инерции различных тел рассчитаны для:

1) сплошного диска (цилиндра) радиусом R , массой m относительно оси, проходящей через его центр:

$$J_O = \frac{1}{2}mR^2 \tag{2.21}$$

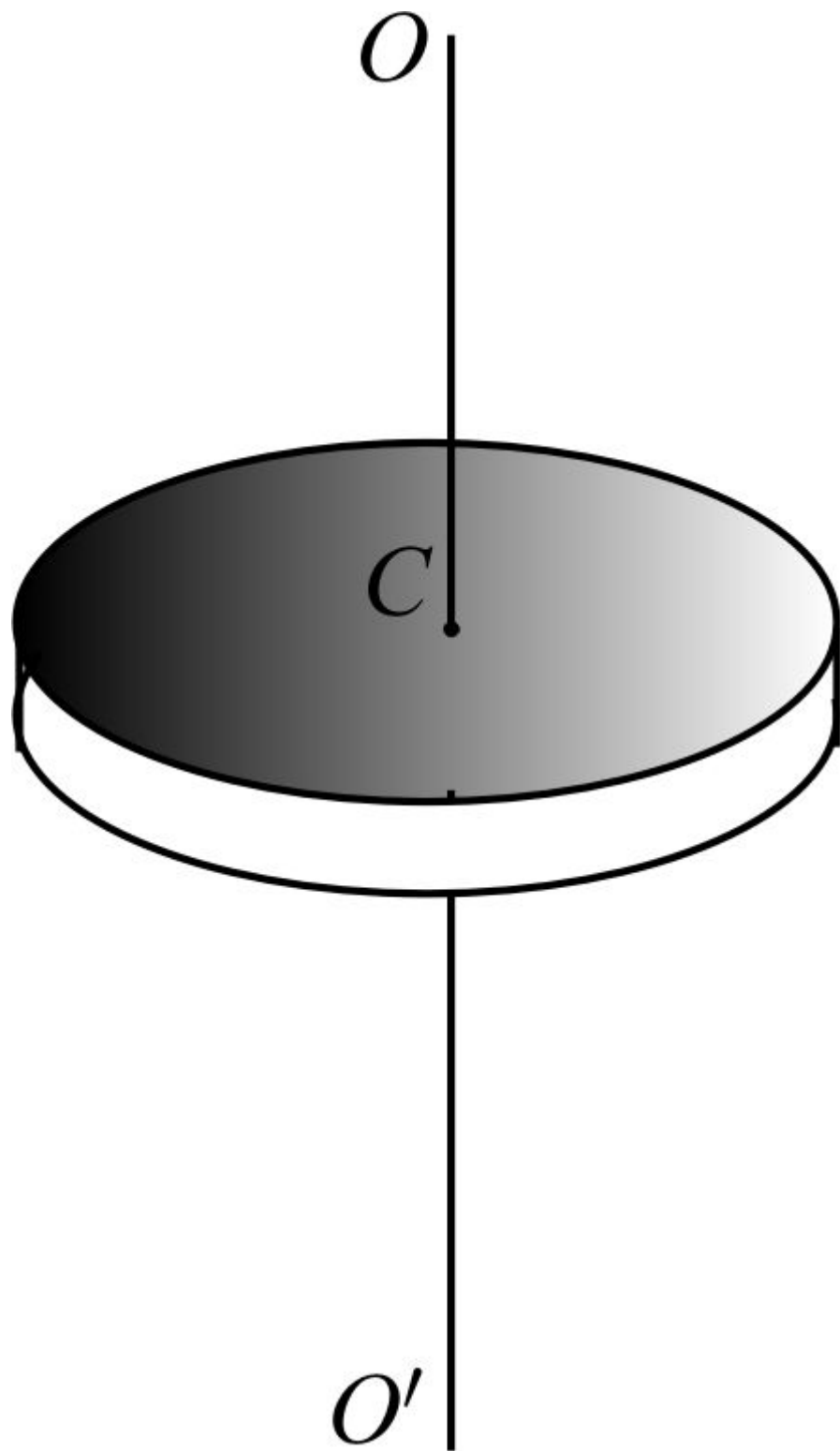


Рис. 4

2) тонкого обруча (кольца) радиусом R и массой M относительно оси, проходящей через его центр перпендикулярно его плоскости:

(2.25)

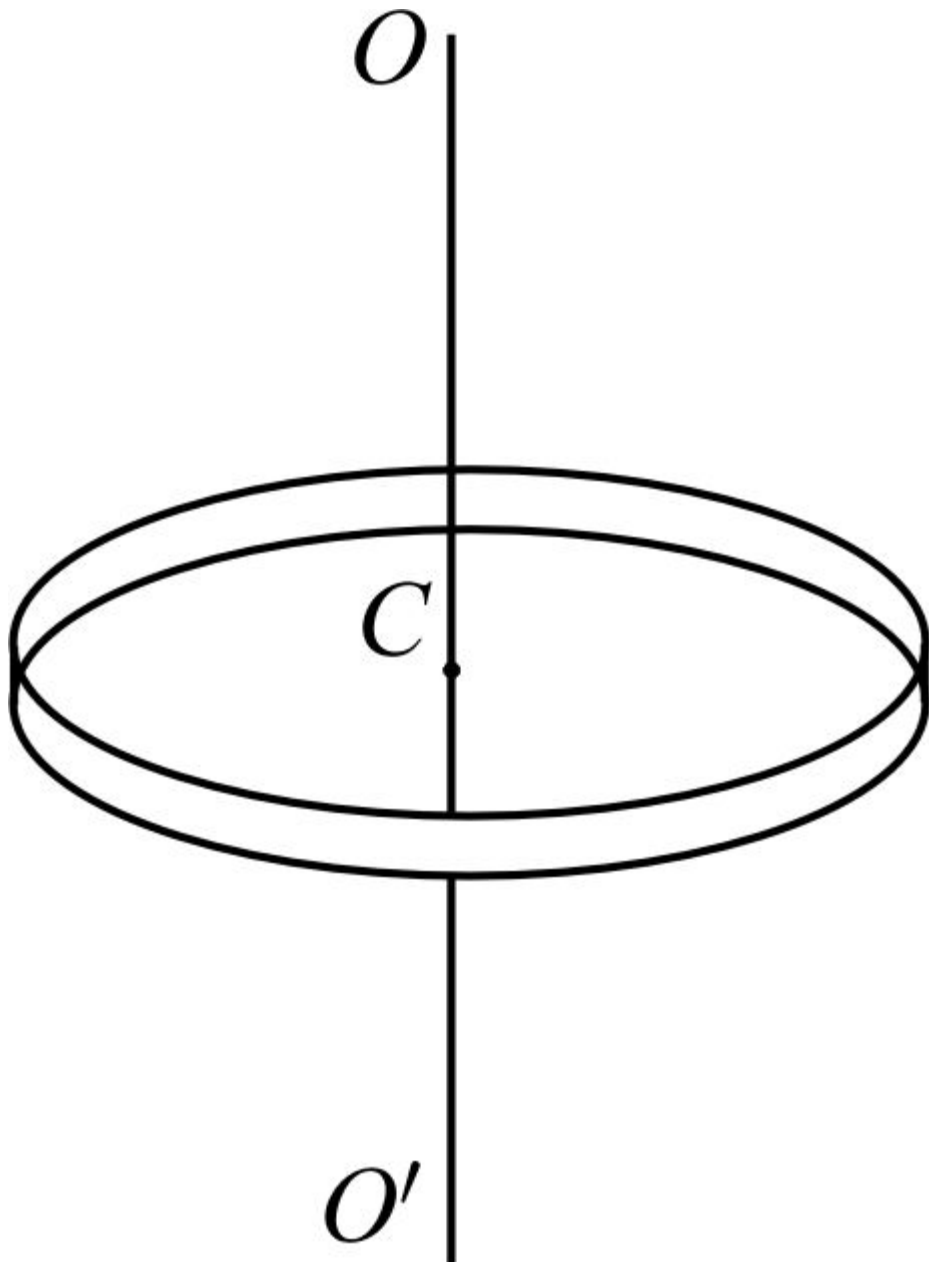


Рис. 5

3) шара радиусом R и массой M относительно оси, совпадающей с одним из его диаметров:

(2.226)

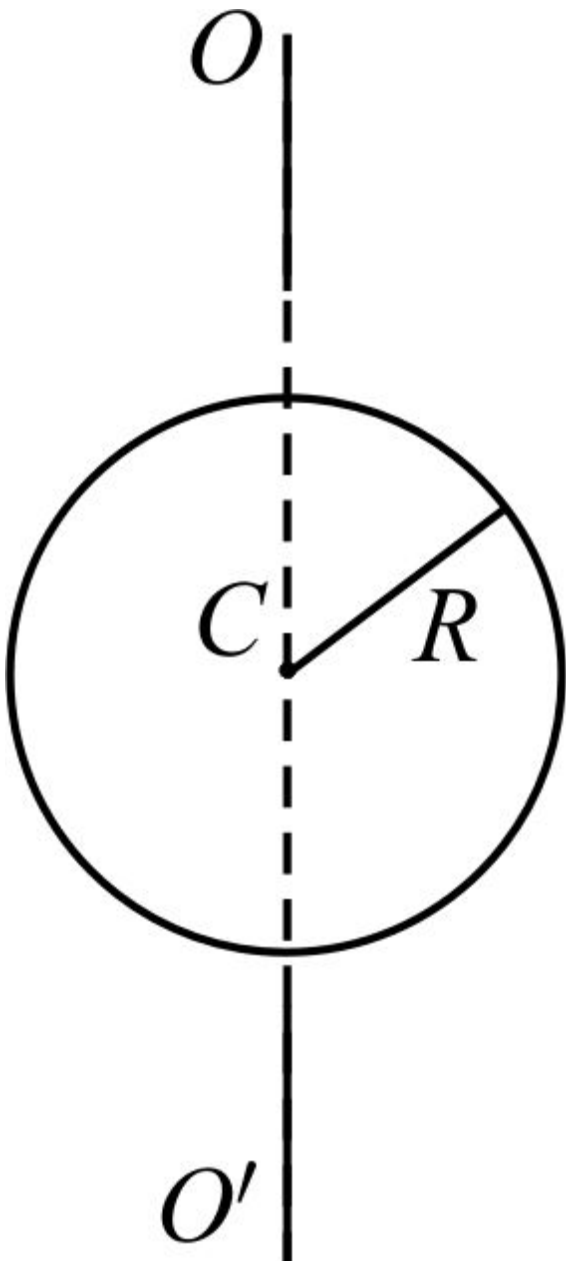


Рис. 6

4). момент инерции тонкого стержня массой M и длиной l относительно оси, проходящей через его середину:

(2. 237)

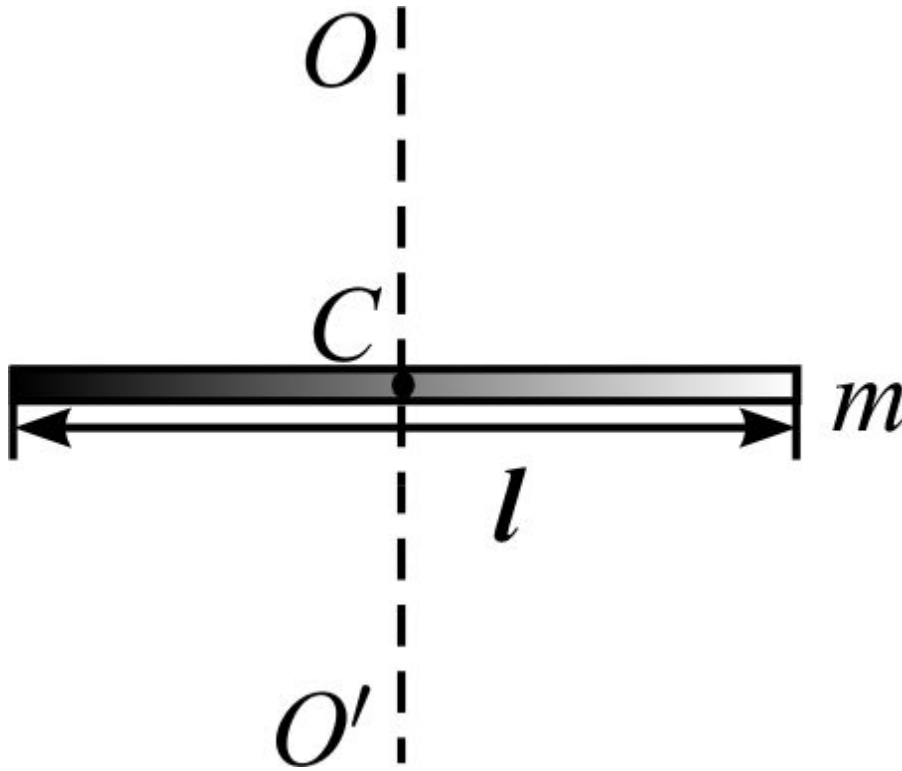


Рис. 7и. т. д.

Если известен момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс J_c , то момент инерции относительно любой другой оси, параллельной первой, может быть найден на основании так называемой теоремы Штейнера-Гюйгенса: *момент инерции тела J относительно любой оси равен моменту инерции тела J_c относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс тела плюс произведение массы тела m на квадрат расстояния a между осями:*

$$(2.28)$$

§ 2.5. Уравнение моментов. Закон сохранения момента импульса.

Из основного уравнения динамики вращающегося тела (2.23) ($\sum M = J \epsilon$ или $\sum M = \frac{dL}{dt}$, где L — момент импульса относительно данной оси/точки) и с учетом того, что мгновенное угловое ускорение $\epsilon = \frac{d\omega}{dt}$ следует:

или

$$(2.24)$$

Обозначим произведение:

$$(2.30)$$

и назовем его *моментом импульса* тела относительно данной оси или точки.

Единица измерения момента импульса относительно данной оси/точки в системе СИ: $\text{кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}$.
(2.29) с учетом (2.30) запишется как

$$(2.31)$$

и представляет собой *уравнение моментов: быстрота изменения момента импульса тела относительно некоторой оси равна результирующему моменту всех внешних сил, приложенных к телу, относительно той же оси.*

Если суммарный момент внешних сил $\sum M = 0$, т. е. система замкнутая, то момент импульса системы, как следует из (2.31), остается постоянным, т. е.:

$$(2.32)$$

(2.32) – закон сохранения момента импульса, который может быть записан следующим образом:

$$(2.32')$$

Демонстрацией закона сохранения момента импульса служат опыты со скамьей Жуковского (металлическая платформа, вращающаяся относительно вертикальной оси с малым трением). Человек с гантелями садится на нее,

. Раздвигая руки с гантелями или прижимая их к груди (т. е. меняя момент инерции системы), можно изменить угловую скорость вращения. Фигурист на коньках или балерина поступают аналогичным образом, желая изменить частоту вращения.

Каждая элементарная частица (e , p , n , γ) обладает собственным моментом импульса. Сумма этих моментов сохраняется, например, при ядерных реакциях, которые сопровождаются превращением одних элементарных частиц в другие.