

Тема 3. Работа и механическая энергия. Силы в механике.

§ 3.1. Работа силы. Мощность

Каждодневный опыт говорит о том, что перемещение тела происходит только под действием силы. Если под воздействием силы \vec{F} тело совершает перемещение $\Delta\vec{r}$, то говорят, что данная сила совершает над телом работу, определяемую скалярным произведением \vec{F} на $\Delta\vec{r}$, т.е.

$$A = (\vec{F} \cdot \Delta\vec{r}) = |\vec{F}| |\Delta\vec{r}| \cos\alpha, \quad (3.1)$$

где α – угол между направлением \vec{F} и $\Delta\vec{r}$ (рис. 3.1).

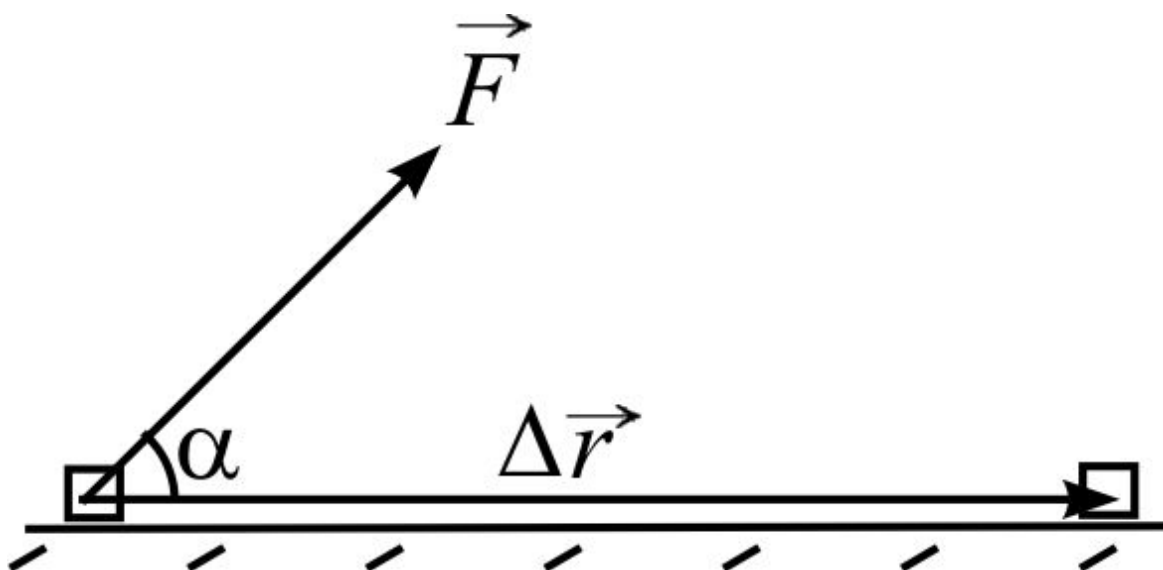


Рис. 3.1

Если движение прямолинейное, то т. к. $\Delta\vec{r} = \Delta r \vec{e}_x$, работа определяется следующим образом:

$$A = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx, \quad (3.2)$$

По формулам (3.1.) и (3.2) можно определять работу постоянной силы ($F_x = \text{const}$) и в случае, если траектория движения – прямая линия. В системе СИ работа измеряется в Дж:

В зависимости от величины угла α работа может быть как положительной, если $\alpha < 90^\circ$, а значит $\cos\alpha > 0$, так и отрицательной, если $\alpha > 90^\circ$, а значит $\cos\alpha < 0$. При $\alpha = 90^\circ$ работа силы равна 0, несмотря на то, что ни сила, ни перемещение нулю не равны.

Если за время перемещения величина силы изменяется по величине или направлению, то работу силы можно вычислить по формуле:

$$A = \int_{x_1}^{x_2} \bar{F}_x dx, \quad (3.3)$$

где \bar{F}_x – среднее значение силы на данном перемещении.

Так, работа силы упругости определится следующим образом:

$$A = \int_{x_1}^{x_2} -kx dx, \quad (3.4)$$

где k – коэффициент упругости (жесткости) пружины,
 x – удлинение ее.

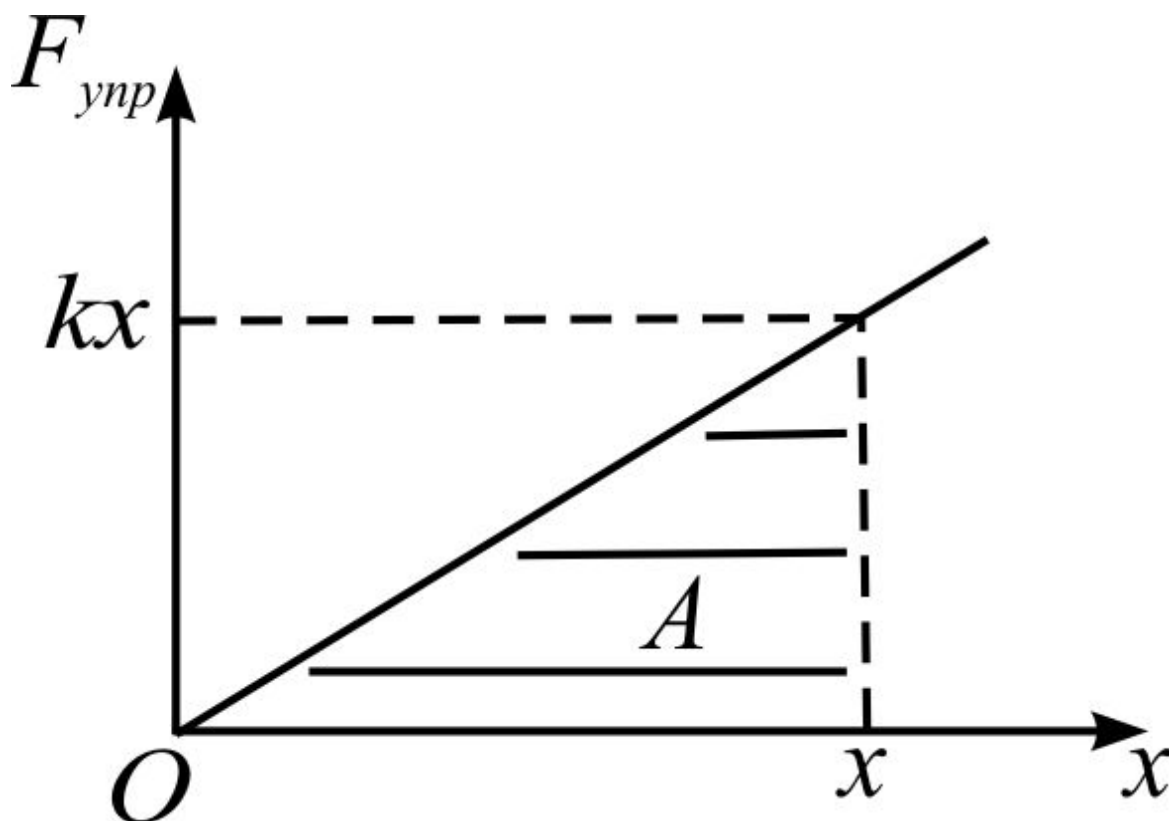


Рис. 3.2

Работа же силы тяжести ($F_T = mg$) определится как:

$$A = mgh \quad (3.5)$$

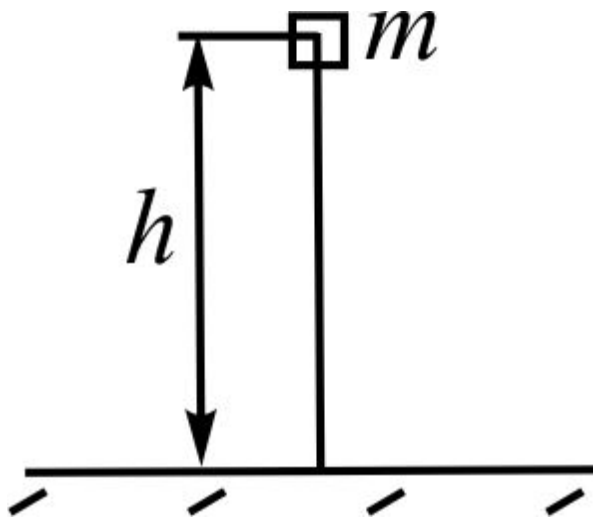


Рис. 3.3

Графически работу можно определить, вычислив площадь заштрихованных фигур (рис. 3.2 и 3.4).

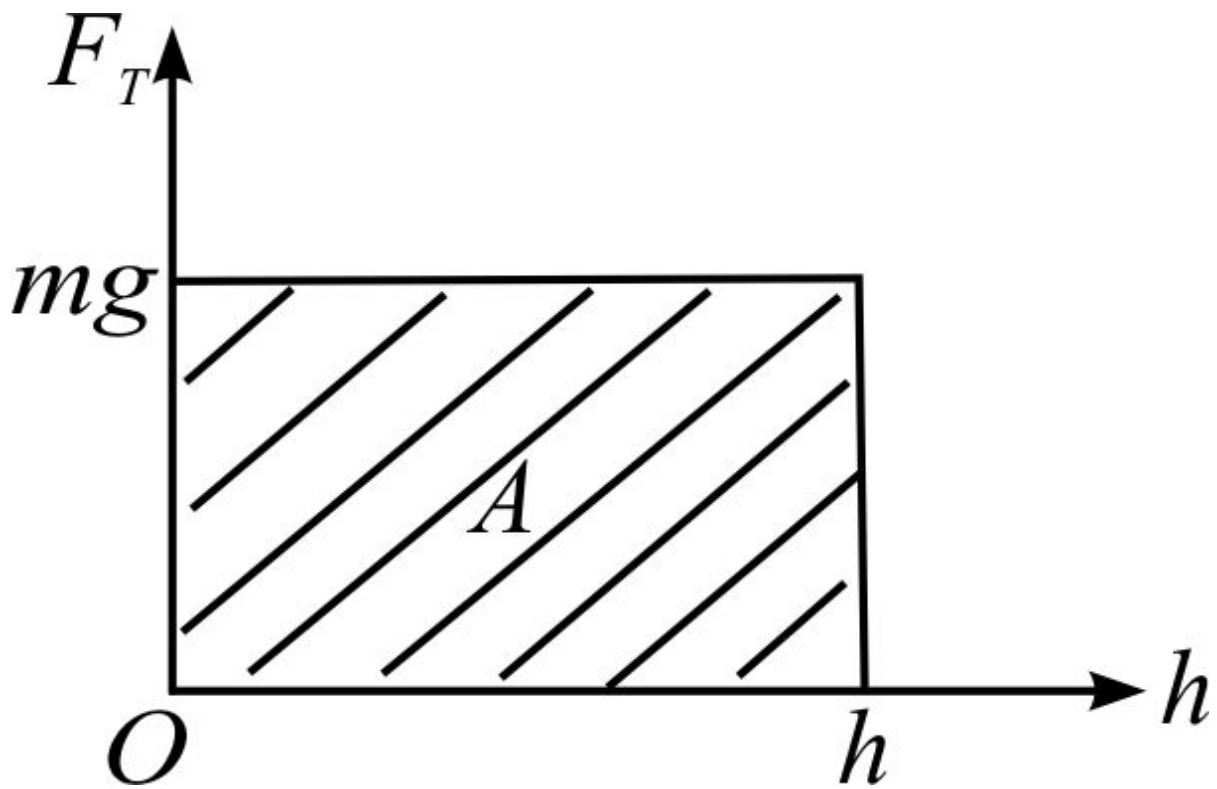


Рис. 3.4

Одна и та же работа может выполняться за различное время. Для характеристики быстроты выполнения работы вводится понятие мощности. *Мощностью N* называется величина, равная отношению работы A к промежутку времени t , за который эта работа совершена, т.е.

$$N = \frac{A}{t} \quad (3.6)$$

В случае движения тела с постоянной скоростью v под действием силы F мощность определяется следующим образом:

$$(3.7)$$

В системе СИ мощность измеряется в ваттах (Вт):

Из (3.7) следует, что одну и ту же мощность можно получить, либо имея большую силу (как лошадь, например), либо развивая большую скорость (как мотоциклист).

В случае переменной мощности говорят о средней мощности

$$(3.8)$$

либо о мгновенной мощности

$$(3.9)$$

§ 3.2. Кинетическая энергия поступательного и вращательного движения

Если тело способно совершить работу, значит, оно обладает энергией. Энергия в механике определяется положением тел относительно друг друга и их скоростями.

Пусть на тело (м. т.) массой m в течение промежутка времени t действует постоянная внешняя сила (равнодействующая нескольких сил), направление которой совпадает с направлением движения. Ускорение, приобретаемое телом под действием силы ,

определится по II закону Ньютона:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \Rightarrow \vec{F} = m\vec{a} \quad (3.10)$$

Умножим левую и правую части (3.10) на модуль перемещения S , получим

$$FS = ma \cdot S \quad (3.11)$$

Произведение

$$FS = A \quad (3.12)$$

– работа, совершаемая силой F за время ее действия.

Из кинематики известно, что модуль перемещения

$$S = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}, \quad (3.13)$$

где v_0 – скорость тела в начальный момент времени;

v – конечная скорость тела.

Тогда (3.11) с учетом (3.12) и (3.13) примет вид:

$$A = F \cdot S = m \cdot a \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$$

или

$$A = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}. \quad (3.14)$$

Физическая скалярная величина, равная половине произведения массы тела (м. т.) на квадрат его скорости называется *кинетической энергией тела* и обозначается E_k .

$$E_k = \frac{mv^2}{2} \quad (3.15)$$

Таким образом, кинетическая энергия – это энергия, которой обладает тело вследствие своего движения. Тогда выражение (3.14) можно сформулировать следующим образом: *работа равнодействующей всех сил, приложенных к телу (м.т.), равна изменению кинетической энергии этого тела, которое произошло за время действия сил.* Это утверждение называют *теоремой об изменении кинетической энергии*.

(3.14) можно записать еще так:

$$(3.14')$$

Значение кинетической энергии зависит от выбора СО, т. е. кинетическая энергия — величина относительная, т. к. скорость – величина относительная.

Если тело (м. т.) массой m движется по окружности, то ее линейная скорость , где — угловая скорость, а r — радиус окружности, а кинетическая энергия

$$(3.16)$$

В общем случае, когда тело движется относительно ИСО поступательно и одновременно вращается относительно некоторой оси, полная кинетическая энергия тела равна сумме кинетических энергий поступательного и вращательного движений:

$$(3.17)$$

§ 3.3. Потенциальная энергия. Закон сохранения механической энергии

Потенциальная энергия тела – это энергия, которой оно обладает вследствие того, что

находится в силовом поле, или вследствие взаимодействия с другими телами. Поскольку потенциальная энергия определяется силами, значение которых зависит от вида взаимодействия и от расстояния между взаимодействующими телами, то универсальной формулы для расчета потенциальной энергии нет.

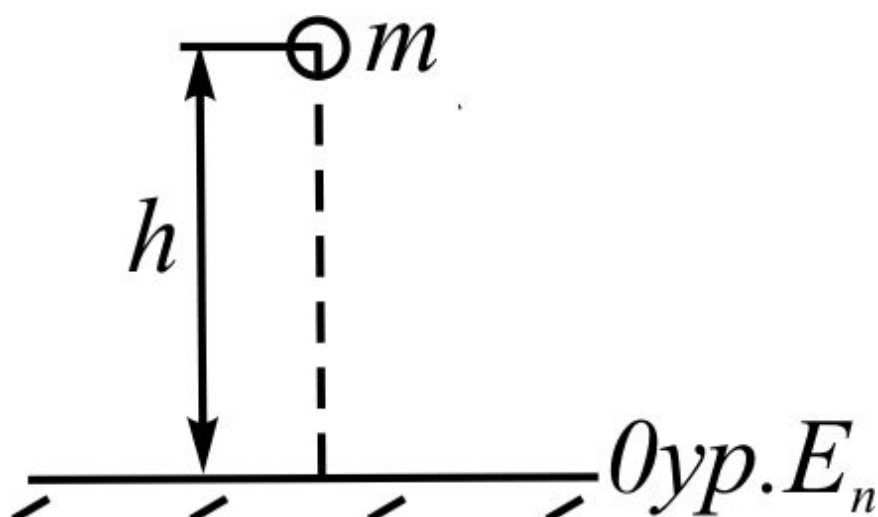


Рис. 3.5

Потенциальная энергия, запасенная поднятым телом массой m на высоту h над Землей в случае, когда нулевой уровень отсчета потенциальной энергии взят на поверхности Земли, определится следующим образом:

$$E_n = mgh \quad (3.18)$$

Потенциальная энергия упругодеформированного тела

$$E_n = \frac{k \cdot x^2}{2}, \quad (3.19)$$

где k — жесткость;

x — абсолютная деформация тела (нулевой уровень E_n выбран в недеформированном состоянии).

Если тело массой m перемещается из точки, находящейся на высоте h_1 над поверхностью Земли, в точку на высоте h_2 , то изменение потенциальной энергии этого тела

$$(3.20)$$

равно работе силы тяжести

$$(3.21)$$

Из (3.20) и (3.21) следует, что *работа силы тяжести* равна изменению потенциальной энергии тела (находящегося в гравитационном поле Земли), взятому с противоположным знаком, т.е.

$$(3.22)$$

Аналогично, *работа силы упругости* равна изменению потенциальной энергии упругодеформированного тела, взятому с противоположным знаком.

Если тела, входящие в физическую систему, движутся, и взаимодействуют друг с другом при этом, то система обладает и кинетической и потенциальной энергией. Сумма кинетической и потенциальной энергий тел физической системы называется *полной механической энергией этой системы*, т.е.

$$(3.33)$$

Если в системе действуют только консервативные силы, то такая система является *консервативной*.

Консервативные силы — это:

1) силы, работа которых не зависит от пути, по которому тело переходит из одного

положения во второе.

2) силы, работа которых на любом замкнутом пути равна нулю.

Примеры: $m\vec{g}$, $\vec{F}_{\text{упр.}}$, \vec{F}_k .

Силы тогда *консервативны*, когда в системе нет перехода механического движения в другие формы движения материи или нет превращения других форм движения в механическое, например, *силы трения, силы сопротивления*. Работа $A_{\vec{F}_{\text{тр}}}$ на замкнутом пути не равна нулю. Их называют *диссипативными*.

Для замкнутой консервативной системы справедлив *закон сохранения полной механической энергии*: полная механическая энергия замкнутой консервативной системы сохраняется, т.е

$$E = \text{const} \quad (3.34)$$

или

$$E_{k_1} + E_{n_1} + \dots = E_{k_2} + E_{n_2} + \dots \quad (3.34')$$