

Тема 5. Механические колебания и волны.

§ 5.1. Гармонические колебания и их характеристики

Колебания – процессы, отличающиеся той или иной степенью повторяемости. В зависимости от физической природы повторяющегося процесса различают: *механические, электромагнитные, электромеханические* и т. д. колебания. Примерами механических колебаний могут являться движения маятника, колебания (вибрации) корпуса корабля, вызванные вращением гребного винта, колебание звучащих тел (струна, камертон и т. д.), колебание воздушного столба в органнх трубах и трубах духовых инструментов и т. д. Рассмотрим *периодические колебания* – колебания, при которых состояние движения тела точно повторяется через равные промежутки времени. Периодическое колебание характеризует:

1. амплитуда колебания A – абсолютная величина наибольшего отклонения колеблющегося тела от положения равновесия (в СИ в м);
2. период полного колебания T - время одного колебания (в с);
3. частота колебаний ν - число колебаний, совершаемых телом в единицу времени (в $1\text{с}^{-1}=1\text{Гц}$).

Среди разнообразных колебательных движений особое место занимают *гармонические колебания* – колебания, при которых физические величины, описывающие такие движения (например, отклонение от положения равновесия x , скорость v , ускорение a и т. д.) изменяются во времени по закону синуса или косинуса:

$$x = A \cdot \text{Sin} (\omega t + \varphi_0)$$
(5.1)

$$x = A \cdot \text{Cos} (\omega t + \varphi_0)$$
 ,(5.2)

где ω - *циклическая частота* – число полных колебаний, совершаемых телом за время, равное 2π секунд. Она связана с частотой ν и периодом T следующим образом:

$$\omega = 2\pi \nu$$
(5.3)

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$
(5.4)

В уравнении гармонических колебаний *фаза* колебаний, формула (5.4), - аргумент Sin или Cos , величина, определяющая смещение тела в любой момент времени, т. е. определяет состояние колеблющегося тела.

Фаза φ измеряется в СИ в радианах. Изменению фазы на 2π радиан соответствует промежуток времени в один период T .

φ_0 - начальная фаза – фаза в момент времени $t=0$.

Геометрическое представление гармонического колебания можно дать, если предположить, что материальная точка движется равномерно по окружности против часовой стрелки из положения равновесия M_0 (см. рис. 20)

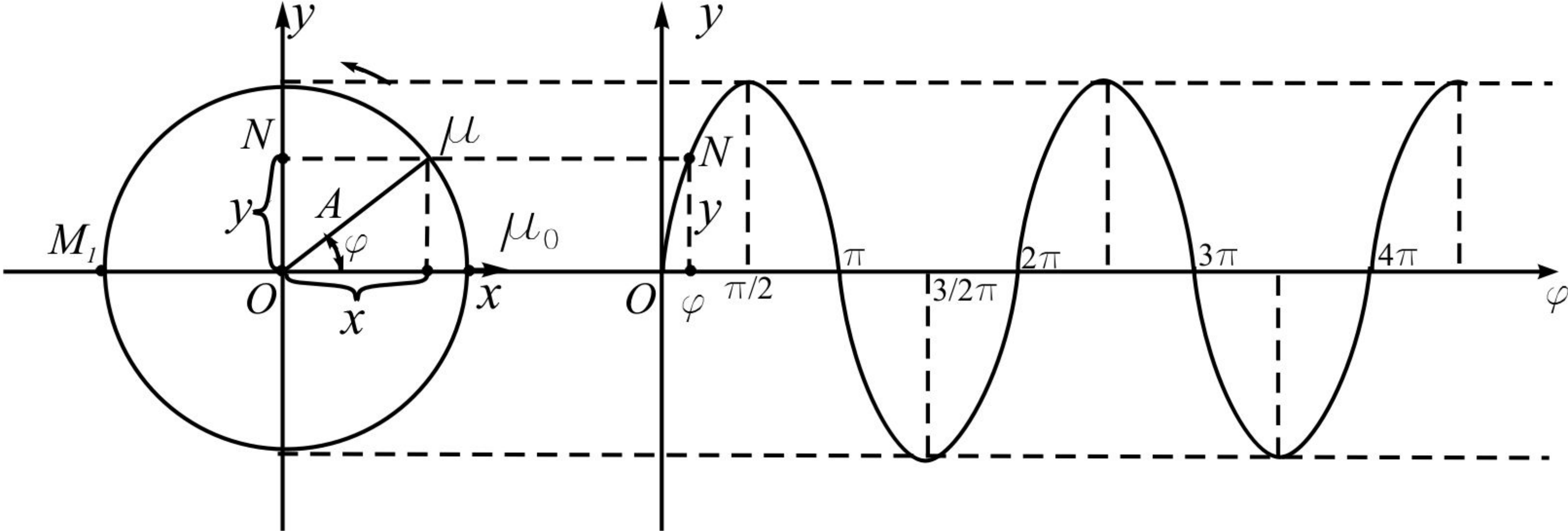


Рис. 20 Гармонические колебание

По мере того, как точка N будет двигаться от положения M_0 к M_1 и от M_1 к M_2 , ее проекции на оси координат, точки x и y , будут совершать колебательное движение – точка x по горизонтальному диаметру окружности (вдоль оси Ox), точка y - по вертикальному диаметру (вдоль оси Oy). Обе с одинаковой амплитудой, равной радиусу окружности A .

Положение точки N в произвольный момент времени определяется углом φ . Положение ее проекции x на горизонтальную ось определяется абсциссой $x = A \cdot \cos \varphi$. Из рисунка видно, что $x = A \cdot \cos \varphi$ (5.5)

Положение проекции y точки N на вертикальную ось определяется ординатой $y = A \cdot \sin \varphi$ (5.6)

Следовательно, точки x и y совершают именно гармонические колебания.

Если угловую скорость движения точки по окружности обозначить ω , то угол $\varphi = \omega t + \varphi_0$, и тогда $x = A \cdot \cos (\omega t + \varphi_0)$ (5.5')
 $y = A \cdot \sin (\omega t + \varphi_0)$ (5.6')

где φ_0 - начальная фаза.

Если движение материальной точки по окружности начинается не из положения M_0 , а, например, из положения M_1 , то угол φ_0 , которым определяется положение точки и ее проекций на оси координат в начальный момент, - это начальная фаза. Тогда колебательное движение точек x и y описывается формулами:

$$x = A \cdot \cos (\omega t + \varphi_0)$$
(5.5'')

$$y = A \cdot \sin (\omega t + \varphi_0)$$
(5.6'')

§ 5.2 Скорость и ускорение точки при гармоническом колебательном движении

Пусть изменение смещения колеблющейся точки происходит по синусоидальному закону:

$$x = A \cdot \cos (\omega t + \varphi_0)$$
(5.1)

Скорость точки определяется как производная от (5.1):

$$v = -A\omega \cdot \sin (\omega t + \varphi_0)$$
(5.7)

где $A\omega$ - амплитудное значение скорости.(5.8)

(5.8) - амплитудное (максимальное) значение скорости.

Из соотношений (5.6) и (5.7) видно, что в те моменты времени, когда смещение точки равно нулю (синус равен нулю), скорость будет наибольшей (косинус равен единице), и наоборот.

Если продифференцируем по времени (5.7), то найдем закон изменения ускорения:

$$a = -A\omega^2 \cdot \cos (\omega t + \varphi_0)$$
(5.9)

где $A\omega^2$ - амплитудное значение ускорения.(5.10)

(5.10) – амплитудное (максимальное) значение ускорения.

Сопоставляя формулу (5.9) с (5.6) для смещения, можно сделать вывод о том, что ускорение и смещение одновременно обращаются в нуль и одновременно достигают наибольших значений.

Ускорение и смещение изменяются в противофазе. Сравнивая (5.9) с (5.6) можно записать:

$$a = -\omega^2 x$$
(5.11)

Таким образом, ускорение при гармоническом колебании пропорционально смещению и направлено к одной и той же точке – среднему положению.

Графическая зависимость смещения x , скорости v и ускорения a от времени t (из формул (5.6); (5.7); (5.9)) в случае, когда начальная фаза $\varphi_0 = 0$ представлена на рисунке:

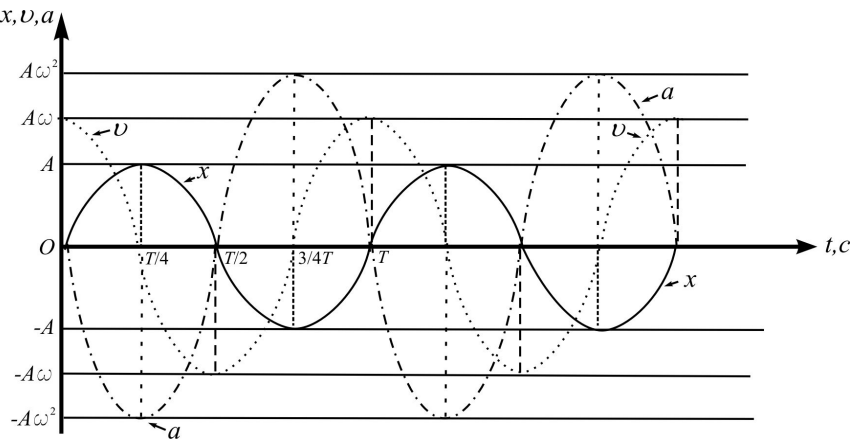


Рис. 21

§ 5.3. Динамика колебательного движения. Пружинный, математический и физический маятник

Колебания, происходящие в системе при отсутствии внешних воздействий после отклонения системы от положения равновесия, называют *свободными* или *собственными*. Если в системе отсутствует переход механической энергии в другие ее виды, т. е. система консервативная, то свободные колебания называют *незатухающими*. Из предыдущего параграфа следует, что при колебательном движении ускорение переменное, поэтому оно обусловлено действием переменной силы. Из второго закона Ньютона уравнение динамики материальной точки массой m , которая под действием переменной силы F совершает гармоническое колебание с ускорением , имеет вид:

$$F = m \cdot a = -m \omega^2 \cdot x = -k \cdot x , \tag{5.12}$$

$$\text{где} \tag{5.13}$$

Таким образом, сила, вызывающая гармоническое колебание, пропорциональна смещению и направлена против смещения. Ее называют *возвращающей силой*. Рассмотрим колебания некоторых систем:

I) *Пружинный маятник* – колебательная система, состоящая из тела массой m , прикрепленного к пружине жесткостью . Возвращающей силой в данном случае будет сила упругости: .

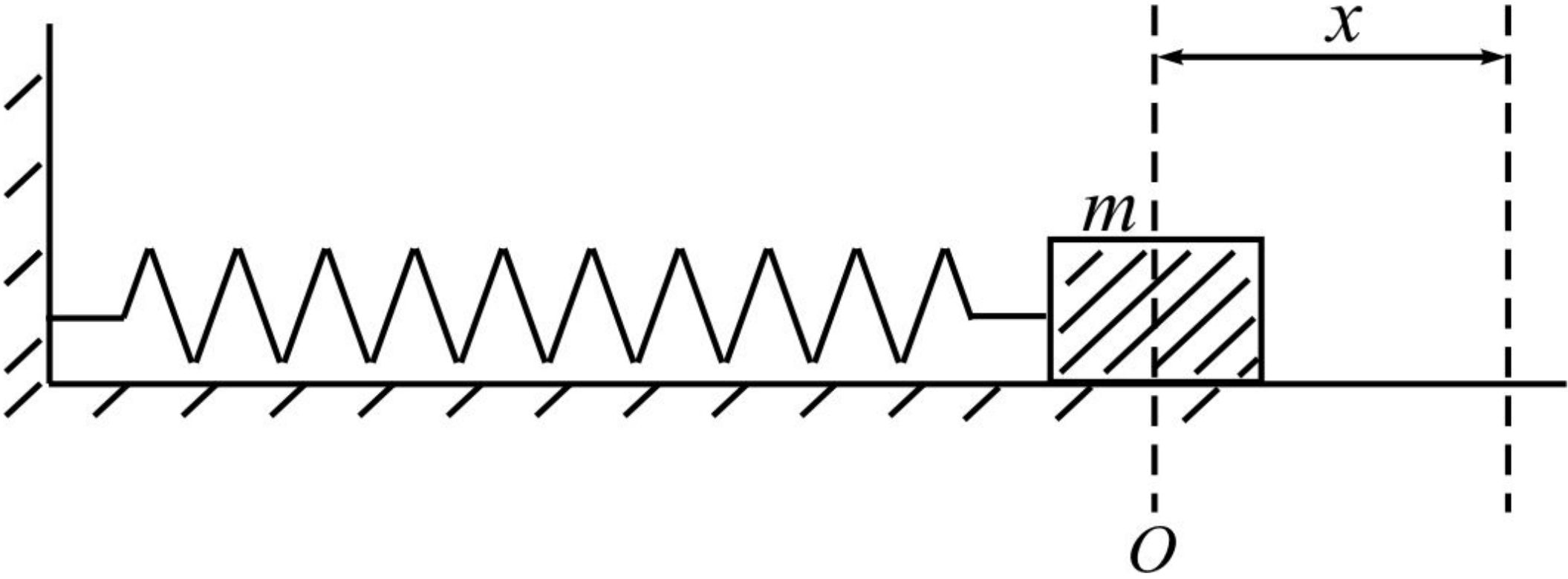


Рис. 22

Тогда второй закон Ньютона:

Из (5.13) период колебаний пружинного маятника:

$$\tag{5.14}$$

II) *Математический маятник* – идеализированная система, состоящая из невесомой и нерастяжимой нити, на которой подвешена масса, сосредоточенная в одной точке (,). В случае математического маятника возвращающая сила имеет неупругую природу. Такая сила называется *квазиупругой* (quasi – почти). Она пропорциональна смещению, но противоположна ему по знаку.

Период колебаний математического маятника (для углов отклонения) найдем, учитывая, что возвращающей силой здесь будет сила . Второй закон Ньютона:

$$,$$

где

Тогда

$$\tag{5.15}$$

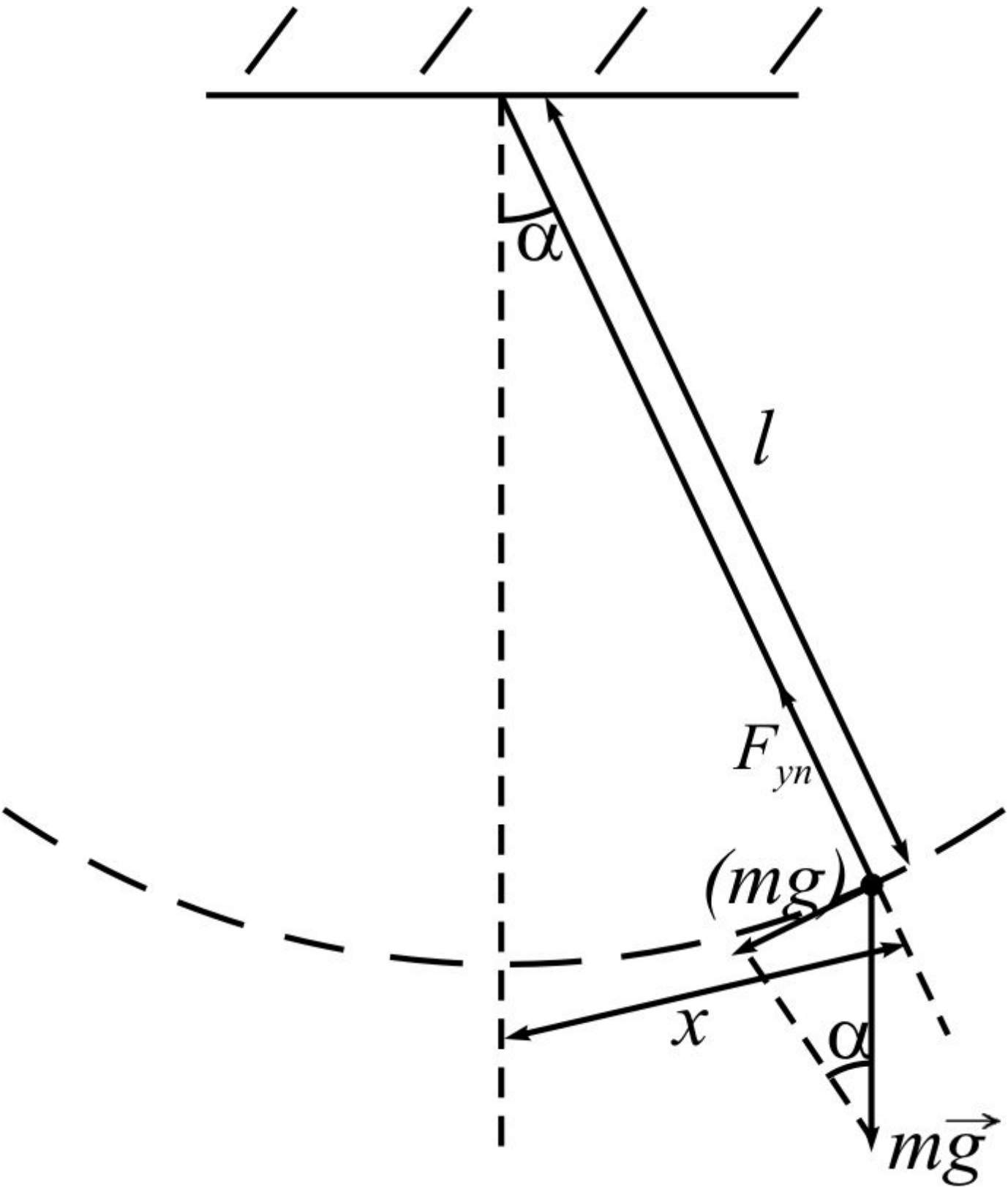


Рис. 23

III) *Физический маятник* – твердое тело, имеющее горизонтальную неподвижную ось вращения, не проходящую через его центр тяжести. Период колебаний физического маятника:

$$\tag{5.16}$$

где

- момент инерции тела относительно оси вращения,
- масса тела,
- расстояние от центра масс до оси колебаний.

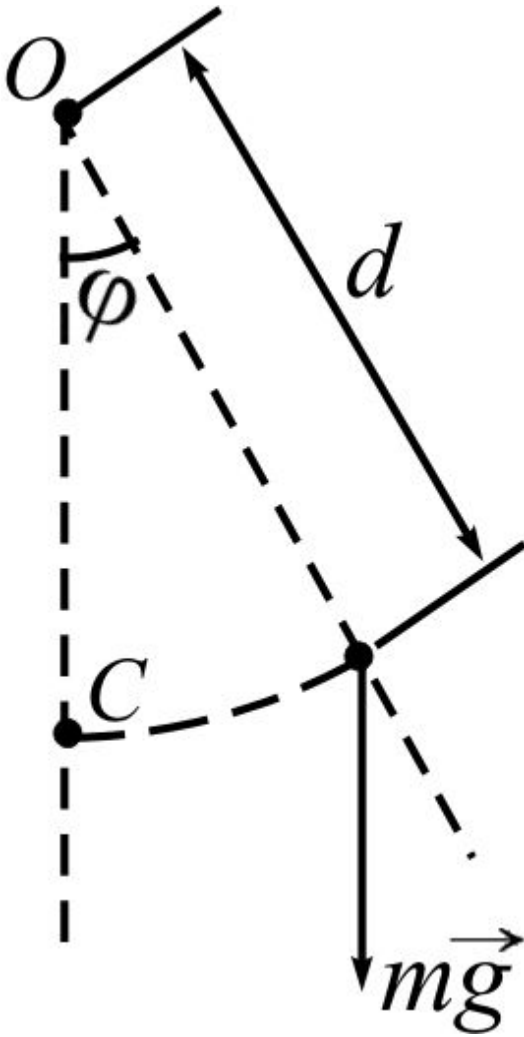


Рис. 24

При гармоническом колебании происходит периодическое взаимное превращение кинетической энергии колеблющегося тела и потенциальной энергии , обусловленной действием квазиупругой силы. Полная энергия E складается из E_k и E_n :

$$(5.17)$$

С учетом формулы (5.7) запишем для:

а) кинетической энергии:

$$(5.18)$$

б) потенциальной энергии:

Но так как , то

$$(5.19)$$

Полная энергия

или

$$(5.20)$$

Таким образом, *полная энергия гармонического колебания постоянна и пропорциональна квадрату амплитуды.*

Графики , и в зависимости от времени представлены на рисунке

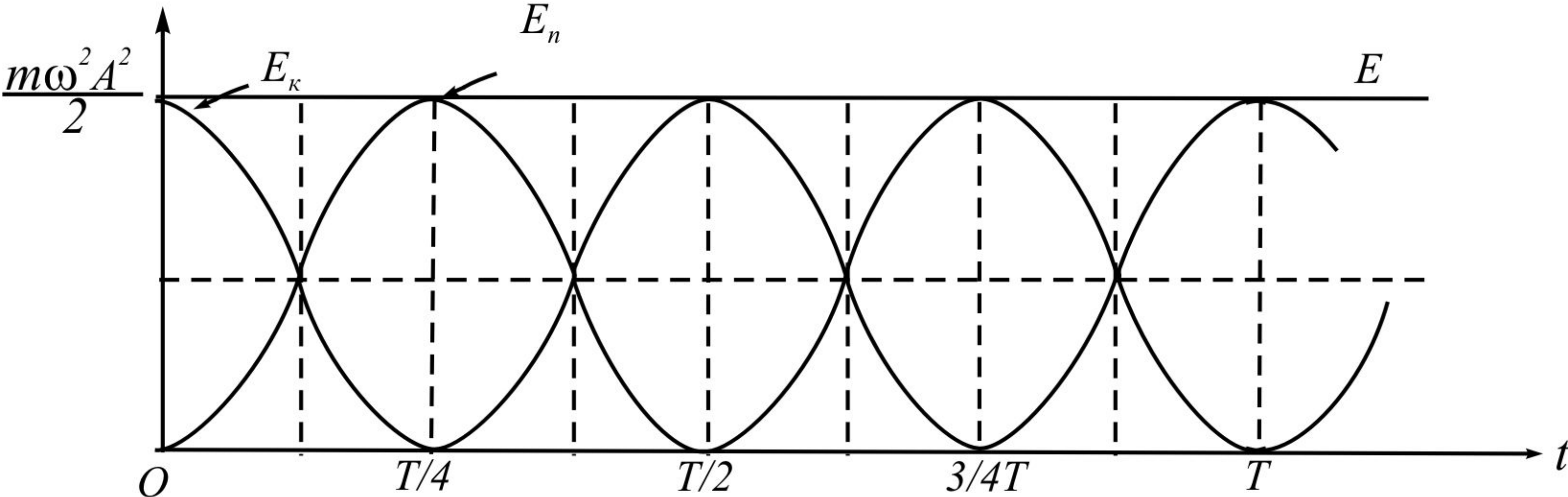


Рис. 25

§ 5.4. Затухающие и вынужденные колебания

При колебательном движении реальной механической системы часть ее энергии из-за действия сил трения, сопротивления воздуха и т. д. переходит в теплоту. Поэтому энергия, а значит и амплитуда колебаний уменьшается до нуля. Такие колебания называют *затухающими*.

Для затухающих колебаний на систему, кроме квазиупругой силы действует еще *сила сопротивления*, пропорциональная скорости и направленная противоположно ей: , т. е. уравнение затухающих колебаний:

$$(5.21)$$

где - коэффициент сопротивления среды.

Но так как , а , (5.21) перепишем в виде:

$$(5.22)$$

Разделив члены (5.22) на и введя обозначения:

получим уравнение:

$$(5.23)$$

(5.23) – линейное однородное дифференциальное уравнение II порядка. В (5.23) величина - *показатель затухания*. Решением данного уравнения будет:

$$(5.24)$$

Из (5.24) следует, что амплитуда колебательного движения в случае действия квазиупругой силы и силы сопротивления со временем изменяется по экспоненциальному закону:

$$(5.25)$$

Период затухающих колебаний:

$$(5.26)$$

Если на колебательную систему действует периодически меняющаяся внешняя сила , то уравнение движения будет иметь вид:

$$(5.27)$$

а колебания называют *вынужденными*.

Если частота вынуждающей силы оказывается близкой к собственной частоте свободных колебаний , то возникает так называемый *резонанс* – резкое увеличение амплитуды колебаний системы. Резонанс широко используется в акустике (гитары, контрабас и т. д. снабжены деревянными...), электро- и радиотехнике и других областях. Но в ряде случаев резонанс – нежелательное явление, так как может привести к большим деформациям и разрушению конструкций.

§ 5.5 Волновой процесс. Уравнение волны

Если в упругую среду поместить колеблющееся тело (источник колебаний), то соседние с ним частицы среды тоже придут в колебательное движение. Колебание этих частиц передается (силами упругости) соседним частицам среды и т. д. Через некоторое время колебание охватит всю среду.

Вследствие того, что колебания распространяются не мгновенно, а с конечной скоростью, в один и тот же момент времени фазы колебания в различных точках пространства будут различны.

Волны – изменения состояния среды (возмущения), распространяющиеся в этой среде и несущие с собой энергию.

Примеры: волны на поверхности воды, расходящиеся от места падения камня, волны землетрясений, сейсмические волны, волны и зыбь океанов и т. д.

Основное свойство всех волн, независимо от их природы, состоит в том, что в волне осуществляется перенос энергии без переноса вещества.

Направление распространения волны называется лучом.

Различают *продольные* и *поперечные* волны.

Продольная волна – волна, у которой частицы среды колеблются вдоль луча (звуковые волны в воздухе, в трубах духовых инструментов и т. д.).



Рис. 26

Поперечная волна – волна, у которой частицы среды колеблются перпендикулярно лучу (по натянутой веревке, и т. д.)

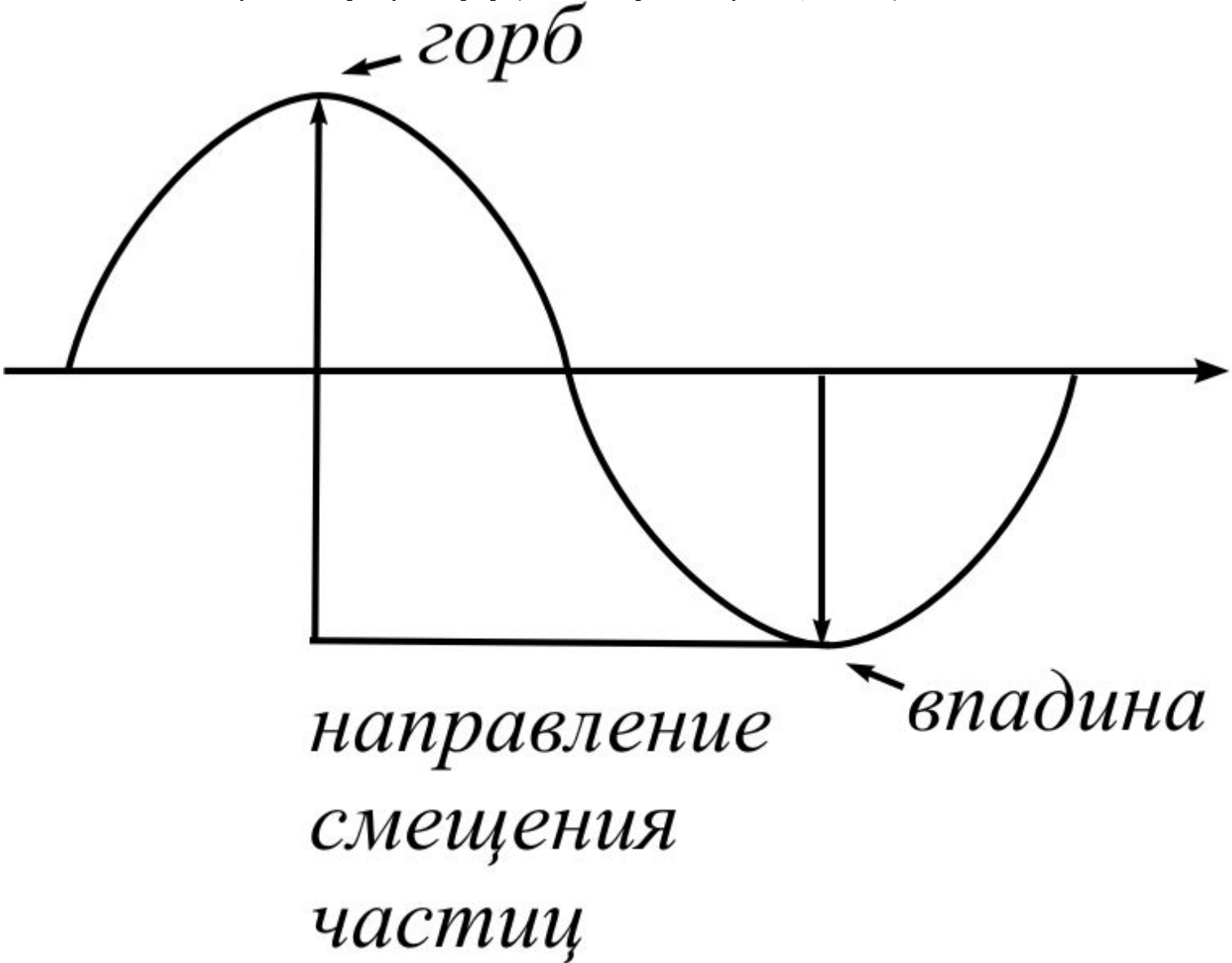


Рис. 27

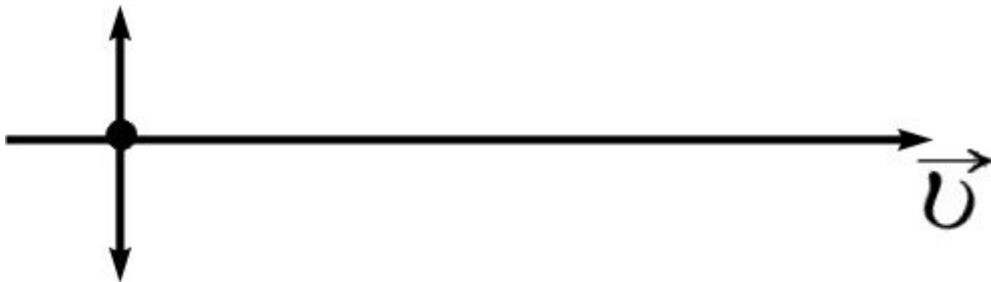


Рис. 28

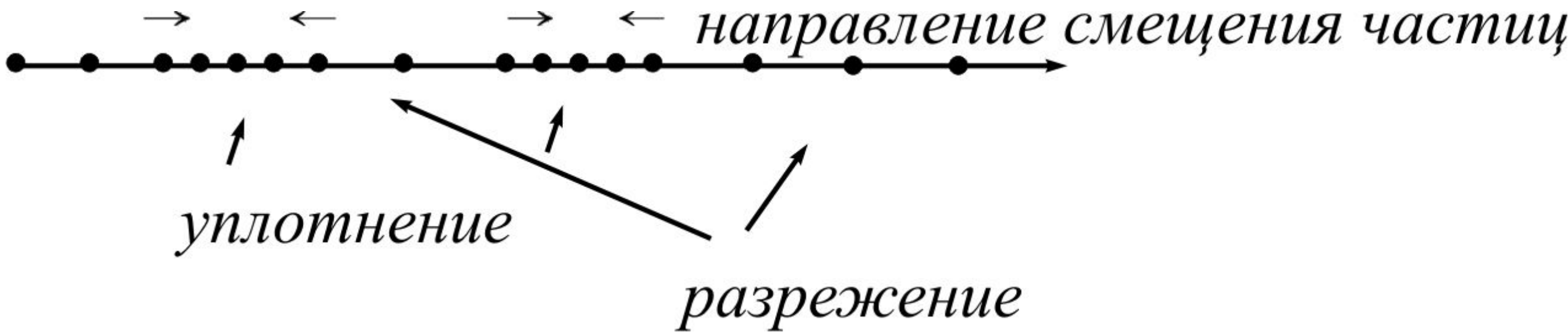


Рис. 29

Волны на поверхности воды – так называемые *поверхностные волны*.

Продольные волны могут возникать в твердых, жидких и газообразных телах. Поперечные волны возникают только в твердых телах, там, где возможна деформация сдвига.

Скорость распространения волны или *фазовая скорость* – скорость, с которой распространяется какая-либо фаза колебания.

Длина волны – расстояние между двумя ближайшими точками волны, в которых фаза колебания одна и та же (например, между двумя соседними гребнями волны).

В течение одного периода колебательный процесс распространяется на расстояние, равное длине волны, т. е.

$$(5.28)$$

$$(5.29)$$

где – частота волны.

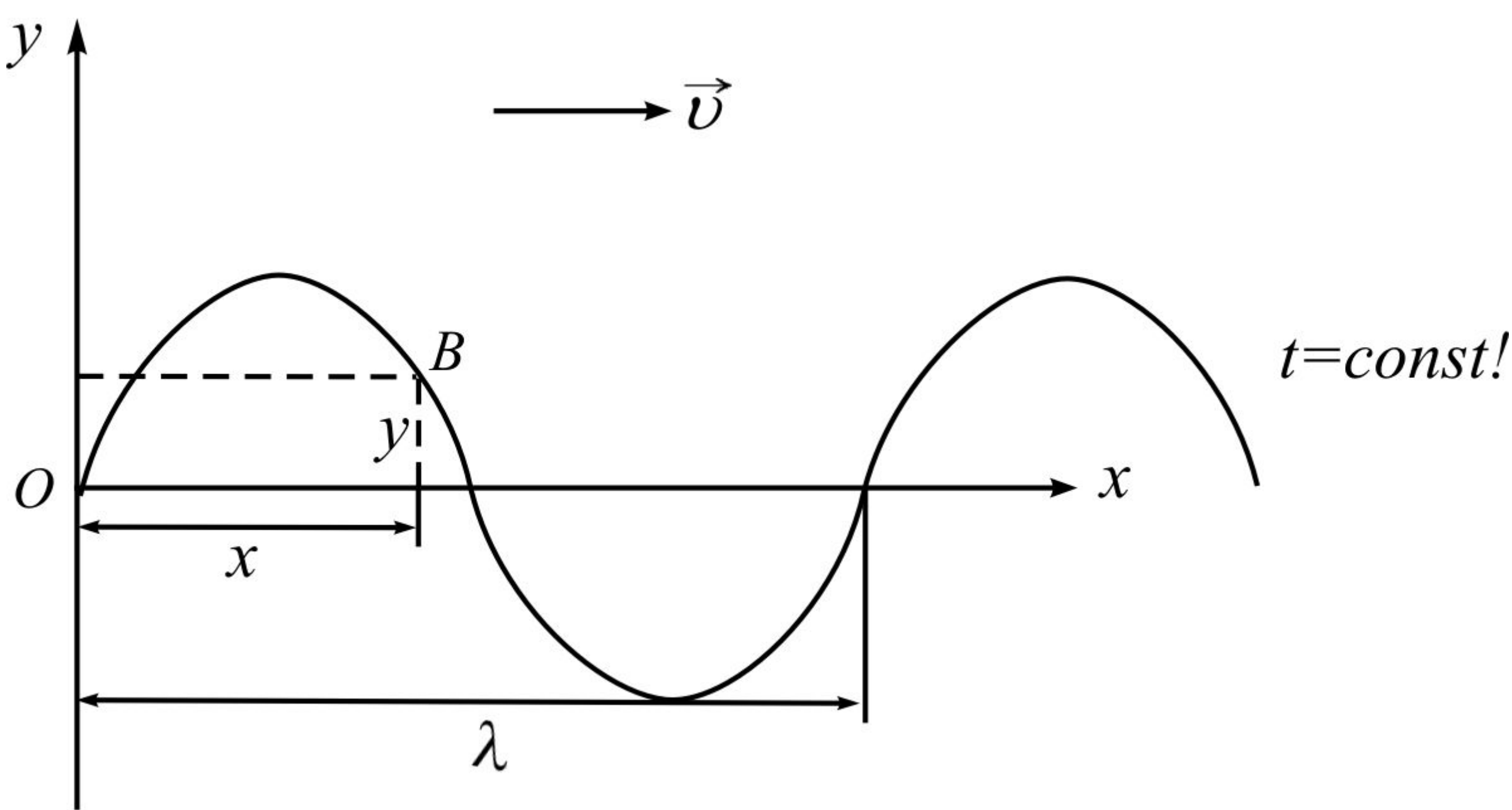


Рис. 30

Установим зависимость между смещением y частиц среды, участвующих в волновом процессе, и расстоянием x этих частиц от источника колебаний O для любого момента времени t .
 Если колебания источника гармонические, т. е.

$$y = A \sin(\omega t), \quad (5.30)$$

где A - амплитуда,
 ω - круговая частота колебаний,
 то колебание частицы B , находящейся на расстоянии x от источника колебаний (т. е. O), начнется с запозданием на время

$$t_0 = \frac{x}{v}, \quad (5.31)$$

где v - скорость распространения волны.
 Тогда

или с учетом (5.31)

$$(5.32)$$

(5.32) – уравнение волны, позволяющее определить смещение любой точки волны в любой момент времени.