## 7.8. Упругие силы. Закон Гука

Все твердые тела в результате внешнего механического воздействия в той или иной мере изменяют свою форму, так как под действием внешних сил в этих телах изменяется расположение их частиц. Любое изменение формы и размеров тела под действием приложенных внешних сил называется *деформацией.*

Деформации делятся на упругие и неупругие, или пластические. Деформация называется *упругой*, если после прекращения действия внешней силы тело полностью восстанавливает первоначальные размеры и форму. Деформация называется *неупругой* (пластической), если после прекращения действия внешней силы тело не восстанавливает первоначальную форму и размеры. В природе нет абсолютно упругих или абсолютно неупругих тел. При сравнительно небольших деформациях многие твердые тела (прежде всего металлические) ведут себя, как тела упругие. При больших внешних воздействиях в телах возникают заметные пластические деформации.

При деформации изменяются расстояния между частицами деформированного тела. В результате этого изменяются электромагнитные (в основном кулоновские) силы взаимодействия между заряженными частицами, входящими в состав атомов. Макроскопически это проявляется в том, что при деформации тела в нем возникают силы, противодействующие внешним силам, которые вызвали деформацию. В механике эти силы, возникающие в упругих телах при небольших деформациях, называют *упругими*. Если деформированное тело находится в состоянии равновесия, то упругие силы компенсируют внешние силы, под действием которых произошла деформация. В случае упругой деформации внутренние силы определяются величиной и видом деформации. Для неупругих деформаций внутренние силы определяются также скоростью изменения деформации. Все разнообразие видов деформаций может быть сведено к двум основным: *растяжение (или сжатие)* и *сдвиг*.

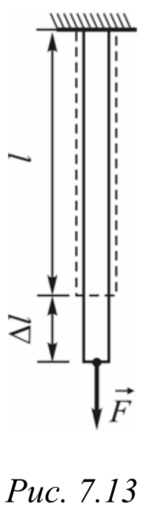

*Рис. 7.13*

Введем физические величины для количественной характеристики деформированного тела. Возьмем тонкий однородный стержень длиной $l$, один конец которого жестко закрепим, а на другой воздействуем силой $\vec{F}$, которая равномерно распределена по сечению и направлена перпендикулярно ему (рис. 7.13). Под действием силы $\vec{F}$ стержень удлиняется на величину $\Delta l$, которая называется *абсолютной деформацией*. Для описания деформации более значимой характеристикой является не абсолютное значение удлинения стержня $\Delta l$, а его относительное удлинение. Это следует из того, что не одинаково просто растянуть, например, на 5 мм два стержня из одинакового материала и одинакового поперечного сечения, но разной длины, например, 10 см и 10 м. В то же время, как показывает опыт, одной и той же силой оба эти тела могут быть растянуты на одну и ту же долю их первоначальной длины. *Относительная деформация* показывает, какую часть от первоначальной длины тела составляет его деформация растяжения

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}.$$

Относительная деформация стержня прямо пропорциональна приложенной силе $\vec{F}$ и обратно пропорциональна его поперечному сечению $S$

$$\varepsilon = \alpha \frac{F}{S}, \qquad (7.32)$$

где $\alpha$ — коэффициент упругости, который зависит от материала, из которого сделан стержень. Для характеристики упругих свойств материала вводят также модуль упругости, который для деформации растяжения называют *модулем Юнга**

$$E = \frac{1}{\alpha}.$$

Подставляя в (7.32) вместо $\alpha$ модуль Юнга, получим

$$\varepsilon = \frac{F}{ES}.$$

В теории упругости внешнюю силу, которая действует на единицу площади поверхности тела, называют *усилием*. Если внешняя сила направлена перпендикулярно площади сечения, усилие называется *нормальным* и обозначается $p_n$

$$p_n = \frac{F}{S}.$$

С учетом введенного понятия соотношение (7.32) запишется:

$$\varepsilon = \frac{p_n}{E} \text{ или } \varepsilon E = p_n.$$

Механическое состояние упругодеформированного тела характеризуется напряжением. *Напряжением* называют внутреннюю упругую силу, действующую на единицу площади сечения, проведенного внутри тела. Если внутренняя сила направлена перпендикулярно площади сечения, напряжение называется нормальным и обозначается $\sigma$. Для деформации, которая установилась в однородном и изотропном теле, напряжение численно равно усилию

$$p_n = \sigma.$$

* Томас Юнг (1773—1829) — английский физик, математик, астроном, один из создателей волновой оптики.

Английский физик Роберт Гук (1635—1703) в 1675 г. на основе экспериментальных данных установил, что для малых деформаций напряжение, которое возникает в деформированном теле, прямо пропорционально относительной деформации

$$\sigma = k\varepsilon,$$

где $k$ — модуль упругости, который зависит от рода материала и типа деформации.

Для деформации растяжения закон Гука запишется:

$$\sigma = E\varepsilon. \tag{7.33}$$

Из формулы (7.33) следует, что модуль Юнга $E$ численно равен напряжению, которое возникает в теле при его относительном удлинении, равном единице. Таким образом, модуль Юнга $E$ численно равен напряжению, при котором длина стержня увеличивается вдвое. Такие деформации выдерживают лишь некоторые материалы (например, каучук), обычно раньше наступает разрушение тела. В случае продольных деформаций тело изменяет не только свой продольный размер, но и поперечный. Для характеристики изменений поперечных размеров тела вводится понятие *относительной поперечной деформации*

$$\varepsilon_d = \frac{\Delta d}{d},$$

где $d$ — первоначальный поперечный размер тела, $\Delta d$ — абсолютное изменение его поперечного размера.

Отношение абсолютного значения относительного поперечного сжатия к относительной продольной деформации называется *коэффициентом Пуассона*

$$\mu = \frac{|\varepsilon_d|}{\varepsilon}.$$

Коэффициент Пуассона $\mu$ зависит от свойств материала и не превышает 0,5. Модуль Юнга и коэффициент Пуассона являются главными характеристиками упругих свойств изотропного материала. Деформация кристалла зависит не только от направления действия на него внешних сил, но и от ориентации в нем кристаллографических осей, поэтому соотношения между $\varepsilon$ и $p_n$ или $\sigma$ более сложные.

Рассмотрим второй основной тип деформаций — сдвиг. Представим твердое тело в форме прямоугольного параллелепипеда, нижняя грань которого закреплена неподвижно, а по касательной к верхней грани равномерно распределено действие сил, равнодействующая которых $\vec{F}_\tau$ (рис. 7.14). Под действием этой силы слои тела сдвигаются друг относительно друга. Из рисунка видно, что абсолютный сдвиг слоев разный и зависит

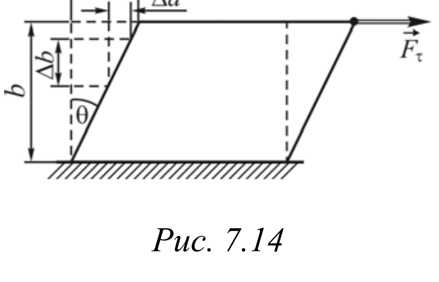


*Рис. 7.14*

он от их расположения. Для характеристики упругих свойств тела при деформации сдвига вводится понятие *относительного сдвига*

$$\gamma = \frac{a}{b} = \frac{\Delta a}{\Delta b} = \operatorname{tg}\theta .$$

Относительный сдвиг $\gamma$ одинаков для всех слоев тела. Угол $\theta$ называют *углом сдвига*. Для малых углов сдвига, что обычно наблюдается в реальных условиях, $\operatorname{tg}\theta \approx \theta$ и $\gamma \approx \theta$. Таким образом, угол сдвига $\theta$ характеризует относительный сдвиг $\gamma$. Введем понятие *касательного (тангенциального) напряжения*, которое определим как упругую силу, действующую на единицу площади сечения внутри тела и направленную по касательной к площади этого сечения

$$\sigma_\tau = \frac{F}{S} .$$

Опытным путем установлено, что для малых деформаций упругое касательное напряжение прямо пропорционально углу сдвига:

$$\sigma_\tau = G\gamma = G\theta .$$

Коэффициент пропорциональности $G$ зависит только от свойств материала и называется модулем сдвига. Если $\gamma = \operatorname{tg}\theta = 1$, то $G = \sigma_\tau$.

Таким образом, *модуль сдвига G* численно равен такому тангенциальному напряжению, при котором угол сдвига оказался бы равным 45°. В реальных случаях раньше наступает разрушение тела.

Модуль Юнга $E$, модуль сдвига $G$ и коэффициент Пуассона $\mu$ связаны между собой следующим соотношением:

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} .$$

Деформация *кручения* по своей природе является деформацией неоднородного сдвига. Под действием вращающего момента $\vec{M}$, созданного парой сил $\vec{F}$, цилиндр длиной $l$ и радиусом $r$ (рис. 7.15), нижнее основание которого закреплено, будет испытывать деформацию кручения. Как видно, деформация кручения представляет собой деформацию сдвига. Но величина сдвига будет не одинакова по всему радиусу цилиндра. Любой участок слоя получает по отношению к соответствующему участку смежного слоя тем большее смещение, чем дальше он отстоит от оси цилиндра. За счет крутящего момента $M$ слои цилиндра также поворачиваются на разные углы относительно нижнего основания. Для изображенного на рисунке случая верхнее основание повернулось на угол $\varphi$, а образующая цилиндра — на

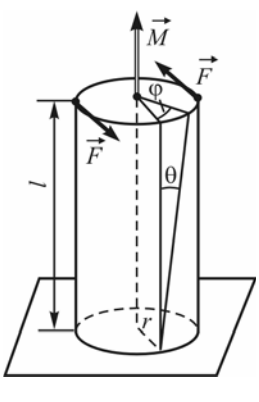


*Рис. 7.15*

угол $\theta$, который и является углом сдвига. При деформации кручения внутри цилиндра возникают упругие силы, создающие упругий момент $M_{\text{упр}}$, который уравновешивает крутящий момент внешних сил $M$. Экспериментально установлено, что момент внешних сил $M$ прямо пропорционален углу закручивания

$$M = D\varphi.$$

Величину $D$ называют *коэффициентом упругости при деформации кручения* (можно в литературе встретить название *постоянная кручения*). Это выражение представляет собой аналитический вид закона Гука для деформации кручения.

Коэффициент упругости при деформации кручения цилиндра и модуль сдвига связаны между собой следующим соотношением

$$D = \frac{\pi G r^4}{2l}. \tag{7.34}$$

Из выражения (7.34) видно, что коэффициент упругости зависит не только от материала, но и от геометрических размеров образца, причем $D$ в большей степени зависит от радиуса цилиндра, чем от его длины, поэтому в приборах для измерения очень малых вращательных моментов применяются очень длинные тонкие нити (например, в крутильных весах).