

9.4. Энергия колебательного движения

Свободные, или собственные, колебания — это такое движение системы, которое происходит при отсутствии внешних воздействий. Поскольку упругие или квазиупругие силы, под действием которых происходят гармонические колебания, являются консервативными, то полная энергия таких колебаний должна оставаться постоянной. Полная энергия колеблющейся системы складывается из кинетической энергии элемента системы, который движется и имеет массу, и потенциальной энергии упругой части системы, равной работе квазиупругой силы. В процессе колебаний величина каждой из них периодически меняется, происходит преобразование кинетической энергии в потенциальную и наоборот.

Пусть система гармонически колеблется по закону

$$x = A \cos(\omega_0 t + \alpha_0).$$

Кинетическая энергия системы

$$E_k = \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 \sin^2(\omega_0 t + \alpha_0), \quad (9.27)$$

потенциальная энергия

$$E_n = \int_0^x kx dx = \frac{kx^2}{2} = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega_0 t + \alpha_0) \quad (9.28)$$

или

$$E_n = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 \cos^2(\omega_0 t + \alpha_0), \quad (9.29)$$

где $k = m\omega_0^2$.

Сравнивая выражения (9.27) и (9.28), видим, что значения кинетической и потенциальной энергии колеблются со сдвигом фаз, равным $\pi/2$. Так, минимуму кинетической энергии в состоянии максимального отклонения соответствует максимум потенциальной энергии. При прохождении положения равновесия система имеет максимальную кинетическую энергию. Потенциальная же энергия равна нулю, потому что в положении равновесия отсутствуют квазиупругие силы. При дальнейшем движении квазиупругие силы выполняют отрицательную работу, в результате чего кинетическая энергия уменьшается, а потенциальная энергия увеличивается. Зависимость потенциальной энергии колеблющегося тела (например, пружинного маятника), от смещения изображена на рис. 9.9.

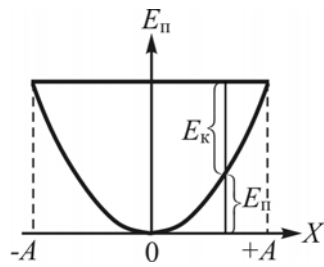


Рис. 9.9

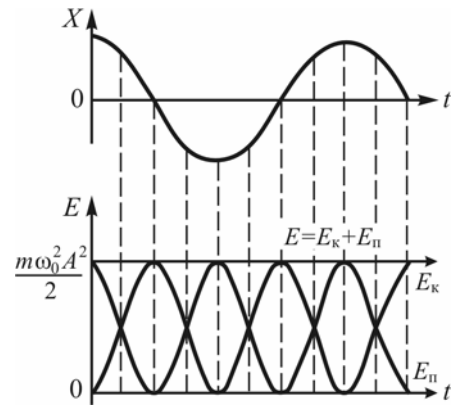


Рис. 9.10

Выражения (9.27) и (9.29) можно переписать в виде:

$$E_{\text{к}} = \frac{1}{4} m \omega_0^2 A^2 [1 - \cos 2(\omega_0 t + \alpha_0)]; \quad (9.30)$$

$$E_{\text{п}} = \frac{1}{4} m \omega_0^2 A^2 [1 + \cos 2(\omega_0 t + \alpha_0)]. \quad (9.31)$$

Таким образом, кинетическая и потенциальная энергии колеблются около некоторого среднего значения $m \omega_0^2 A^2 / 4$ с частотой, вдвое большей частоты колебания системы, изменяясь от нуля до $m \omega_0^2 A^2 / 2$ на протяжении каждого полупериода колебания системы (рис. 9.10).

Суммируя выражения (9.30) и (9.31), получим полную энергию системы

$$E = E_{\text{к}} + E_{\text{п}} = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2, \quad (9.32)$$

которая, как видно, не зависит от состояния системы.

Постоянство полной механической энергии является результатом того, что неизбежными потерями механической энергии, обусловленными трением, пренебрегаем. Если же учитывать силы трения, то полная механическая энергия системы с течением времени будет уменьшаться. Колебания в этом случае будут постепенно затухать и полностью прекратятся, когда вся механическая энергия системы перейдет во внутреннюю.