Раздел 1
МЕХАНИКА

Работа 1.1

Измерение времени соударения шаров. Статистический метод оценки случайных погрешностей

Оборудование: штатив, шары, электронный счетчик-секундомер.

Введение

Измерить физическую величину — значит сравнить ее с однородной физической величиной, принятой за *единицу измерения*. Измерения, при которых искомая физическая величина определяется непосредственным сравнением, называют *прямыми*, а измерения, при которых искомая величина рассчитывается по результатам измерения других величин, связанных с ней определенной функциональной зависимостью, — *косвенными*.

Вследствие несовершенства органов чувств человека и измерительной аппаратуры при любых измерениях получаются лишь *приближенные значения измеряемых величин*. Требуется по результатам опытов найти наиболее близкое к *истинному* значение измеряемой величины и оценить допускаемую *погрешность*.

За приближенное значение принимается *среднее арифметическое* результатов n прямых измерений x_1, x_2, x_3, …, x_n

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i .$$

В соответствии с теорией вероятностей $\bar{x}$ является *математическим ожиданием измеряемой величины*.

Отклонение результата измерения x_i от истинного значения x называется *абсолютной погрешностью (ошибкой) измерения* $\Delta x_i = |x - x_i|$. Отношение абсолютной погрешности к истинному значению — *относительной погрешностью* $\delta = \Delta x_i / x$ (иногда выражается в процентах).

По характеру повторяемости погрешности измерений делятся на *систематические* и *случайные*. Погрешности, связанные с методом измерений, называют *методическими* (они могут быть как случайными, так и систематическими).

Систематическими называют погрешности, которые сохраняют или закономерно изменяют свой знак и величину от опыта к опыту. Они вызваны постоянными причинами: неправильной установкой или неисправностью прибора, неправильным отсчетом показаний, неудачно выбранным методом измерений. Систематические погрешности мы допускаем, например, при взвешивании на неравноплечных весах, при определении плотности вещества пористого тела по его массе и линейным размерам. Такие погрешности не могут быть обнаружены или уменьшены при увеличении числа измерений. Они обнаруживаются только при сравнении результатов с заведомо более точными и устраняются *поверкой* измерительных приборов или выбором более точного метода измерений.

Случайными называются погрешности, которые непредсказуемым образом меняют свой знак и величину от опыта к опыту. Они появляются вследствие несовершенства органов чувств (например, быстроты реакции), плохой повторяемости показаний приборов и многих других причин, которые не всегда можно учесть (движение окружающего воздуха, изменение температуры и т. п.). Увеличение числа измерений ведет к повышению точности результатов. Полностью устранить случайные погрешности невозможно, однако их можно оценить методами теории вероятностей, так как они подчиняются статистическим закономерностям.

Существует несколько способов оценки случайных погрешностей.

1. В простейшем случае указывается *предельная абсолютная погрешность* $\Delta x_{\text{пр}}$ — наибольшее отклонение результатов измерений от среднего арифметического. Например, если при измерении диаметра стержня получены значения: 5,2 мм, 5,8 мм, 6,0 мм, 5,1 мм, 5,4 мм, то среднее значение диаметра $\overline{x} = 5{,}5$ мм, а $\Delta x_{\text{пр}} = 0{,}5$ мм (рис. 1.1). В результате $x = (5{,}5 \pm 0{,}5)$ мм с вероятностью $\alpha = 1$ (то есть, все измеренные значения попали в интервал $\left]\overline{x} - \Delta x_{\text{пр}}, \overline{x} + \Delta x_{\text{пр}}\right[$).

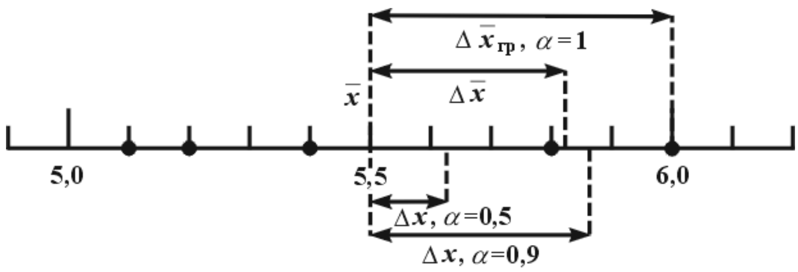

Рис. 1.1

Эта оценка является завышенной, так как показывает только границы области значений полученных ошибок, однако вследствие простоты часто применяется (например, для оценки погрешности отсчета электроизмерительных приборов).

2. Иногда находят *среднее арифметическое модулей погрешностей отдельных измерений*:

$$\overline{\Delta x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left|\overline{x} - x_i\right|.$$

При этом считается, что все ошибки имеют одинаковые знаки, что мало вероятно. Данный способ также дает завышенную погрешность и не позволяет определить надежность результата (возможность попадания x_i в интервал $]\bar{x}-\overline{\Delta x}, \bar{x}+\overline{\Delta x}[$).

Так, для рассмотренного примера $\overline{\Delta x}=0{,}32$ мм, но, как видно из рис. 1.1, не все результаты попали в этот интервал. Вследствие своей простоты этот способ иногда применяется на практике.

3. Наиболее полную оценку случайных погрешностей дают *статистические методы*, основанные на законах распределения случайных величин.

Если случайная величина x

- принимает непрерывный ряд значений;
- одинаковые отклонения Δx данной величины от некоторого среднего значения $\bar{x}$ как в одну, так и в другую сторону повторяются одинаково часто (равновероятны);
- с увеличением отклонения Δx частота (вероятность) его появления уменьшается,

то эта величина подчиняется *нормальному закону распределения Гаусса* (рис. 1.2).

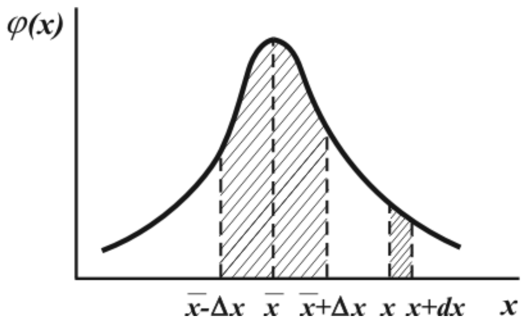

Рис. 1.2

При большом числе опытов случайные погрешности часто удовлетворяют такому закону.

Плотность распределения $\varphi(x)$ *случайной величины* x выражает вероятность $d\alpha$ ее попадания в бесконечно малый интервал $]x, x+dx[$:

$$d\alpha=\varphi(x)dx\cdot$$

Вероятность α попадания результата измерения x_i в интервал $]\bar{x}-\Delta x, \bar{x}+\Delta x[$ (а ошибки измерения Δx_i, соответственно, в интервал $]-\Delta x, +\Delta x[$) равна площади фигуры, ограниченной кривой $\varphi(x)$:

$$\alpha=\int_{\bar{x}-\Delta x}^{\bar{x}+\Delta x}\varphi(x)dx\,.$$

Эта вероятность называется *доверительной вероятностью* (или *надежностью*) результата, интервал $]\bar{x}-\Delta x, \bar{x}+\Delta x[$ — *доверительным интервалом*, а его полуширина Δx — *доверительной погрешностью* для данной α .

Возможный разброс значений среднего арифметического около истинного значения характеризуется его *стандартным отклонением*:

$$\sigma=\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(\bar{x}-x_i)^2}\,.$$

При большом числе измерений в качестве *доверительной погрешности* Δx берут σ , доверительная вероятность при этом $\alpha \approx 0{,}68$. С расширением интервала вероятность возрастает ($\alpha = 0{,}95$ при $\Delta x = 2\sigma$ и $\alpha = 0{,}997$ при $\Delta x = 3\sigma$).

Следует помнить, что распределение Гаусса справедливо только для большого числа измерений; при небольшом числе опытов $(3 \le n \le 20)$ необходимо пользоваться *распределением Стьюдента*. В этом случае доверительная погрешность находится по формуле:

$$\Delta x = t_{\alpha n}\sigma ,$$

где $t_{\alpha n}$ — коэффициент Стьюдента, зависящий от числа измерений n и доверительной вероятности α (табл. XI).

Окончательный результат записывается в виде $x = \bar{x} \pm \Delta x$ с вероятностью α .

В нашем примере $\sigma = \sqrt{\frac{1}{5 \cdot 4}(0{,}3^2 + 0{,}3^2 + 0{,}5^2 + 0{,}4^2 + 0{,}1^2)} \approx 0{,}17$.

При невысокой надежности $\alpha = 0{,}5$ коэффициент $t_{\alpha n} = 0{,}74$ и интервал неширок ($\Delta x = 0{,}74 \cdot 0{,}17 \approx 0{,}13$ (мм)), однако многие результаты не укладываются в него. Для повышения надежности результатов необходимо расширять интервал: при $\alpha = 0{,}9$ — $\Delta x = 0{,}36$ мм, а при $\alpha = 0{,}98$ — $\Delta x = 0{,}63$. Все результаты попадают в этот интервал (в самом деле, вероятность 0,98 означает, что 98 результатов из 100 должны попасть в указанный интервал).

При большом числе измерений $n \ge 20$ распределение Стьюдента переходит в распределение Гаусса (при $n \to \infty$ коэффициент $t_{\alpha n} \to 1$, для вероятности $\alpha = 0{,}68$). *Предельная оценка погрешности* является частным случаем вероятностной при $\alpha = 1$.

При наличии случайных погрешностей с увеличением числа измерений доверительная погрешность уменьшается, так как стандартное отклонение σ и коэффициент Стьюдента $t_{\alpha n}$ для данной надежности α убывают.

Статистический метод позволяет также обнаружить и устранить *промахи* — т. е. грубые ошибки, вызванные чаще всего внезапной поломкой прибора или невнимательностью экспериментатора. Действительно, результаты, которые не попали в доверительный интервал при очень высокой вероятности (например, $\alpha = 0{,}99$), являются промахами. Если среди результатов измерений оказывается значение x_k, которое резко выделяется, то находят коэффициент промаха:

$$v = \frac{|\bar{x} - x_k|}{\sqrt{n} \cdot \sigma}.$$

Если его значение окажется больше предельного для данного числа опытов $v > v_{\text{пр}}$ (табл. XII), то этот результат должен быть отброшен и вычислены новые $\bar{x}$ и σ .

Проверим, является ли промахом в рассмотренном примере результат $x = 6{,}0$ мм, который наиболее отличается от среднего арифметического $\bar{x} = 5{,}5$ мм. Для этого вычислим:

$$v = \frac{|5{,}5 - 6{,}0|}{\sqrt{5} \cdot 0{,}17} \approx 1{,}32 .$$

Как видно из таблицы XII, этот результат промахом не является, так как $v < v_{\text{пр}} = 1{,}96$.

Таким образом, статистический метод позволяет:

- при заданном числе измерений n и надежности α оценить доверительную погрешность Δx;
- при заданном числе измерений n и погрешности Δx определить доверительную вероятность (надежность) результата α;
- определить необходимое число измерений для получения требуемых погрешности и надежности;
- обнаружить и устранить промахи.

Описание установки и метода. На штативе подвешены два металлических шара, соединенных при помощи тонких проводников с электронным счетчиком-секундомером, который состоит из генератора *Г* и счетчика импульсов с числовой индикацией *С* (рис. 1.3).

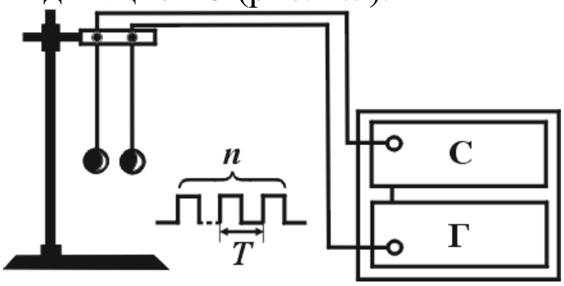

Рис. 1.3

Генератор посылает импульсы частотой v. Счетчик подсчитывает количество n импульсов, которые проходят через замкнутую цепь за время соударения шаров. Таким образом:

$$\tau = nT = \frac{n}{v},$$

где T — период следования импульсов. Пределы измерения времени зависят от частоты генератора (при $v = 100$ Гц одна единица счета соответствует $t_m = 10$ мс, при $v = 100$ кГц $t_m = 10$ мкс).

Порядок выполнения работы

1. Электронным счетчиком-секундомером измерьте время соударения шаров t_i (не менее 20 раз).

2. Вычислите среднее арифметическое $\overline{t}$.

3. Найдите отклонения результатов отдельных измерений $\Delta t = \overline{t} - t_i$ и их квадраты.

4. Результаты запишите в таблицу:

i	t_i, 10^{-5} с	Δt_i, 10^{-5} с	Δt_i^2, 10^{-10} $с^2$

5. Вычислите стандартное отклонение среднего арифметического σ.

6. Найдите значение доверительной вероятности α. По таблице XI найдите коэффициент Стьюдента $t_{\alpha n}$ для данного числа опытов n.

7. Вычислите доверительную погрешность Δt.

8. Проделайте те же операции для трех значений доверительной вероятности α (0,5; 0,9; 0,999) и трех значений числа измерений n (3; 5; 20).

9. Результаты запишите в таблицу:

n	$\overline{t}$, 10^{-5} с	σ	α	$t_{\alpha n}$	Δt, 10^{-5} с

10. Сделайте вывод.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1.Какие измерения называют прямыми? Косвенными?

2.Какие ошибки называются случайными? Систематическими? Методическими? Назовите причины, которые их вызывают.

3.Каков смысл плотности распределения случайных величин?

4.Какое распределение случайных погрешностей справедливо при большом числе измерений? При малом?

5.Что понимают под доверительной вероятностью? Доверительным интервалом? Доверительной погрешностью?

6.Как вычислить доверительную погрешность?

7.От чего зависит коэффициент Стьюдента?

8.Как обнаружить промахи?

9.В чем заключается принцип работы электронного счетчика-секундомера?

10.Какое минимальное время можно измерить электронным счетчиком-секундомером с частотой генератора 10 Гц? 1 кГц?