Работа 1.2

Определение линейных размеров и объемов тел. Обработка результатов измерений

Оборудование: штангенциркуль, микрометр, исследуемые тела.

Введение

Погрешности любого измерения складываются из ошибок, вызванных разными причинами. Основные источники погрешностей — несовершенство методов и средств измерения, неблагоприятные объективные и субъективные условия, особенности вычислений.

Основные *инструментальные погрешности* для всех средств измерения нормируются ГОСТами. Обычно они указываются в паспорте, а также на шкале прибора. Погрешности большинства средств измерений определяются их *классом точности*, который численно равен относительной погрешности, выраженной в процентах.

Для электро- и радиоизмерительных приборов берется так называемая *приведенная относительная погрешность* (т. е. отнесенная к пределу шкалы). Некоторые средства измерений делятся на классы точности по абсолютной погрешности (например, гири весов имеют пять классов точности, установленных ГОСТом).

Дополнительные инструментальные погрешности вызваны неисправностью прибора или отклонением от правил эксплуатации и практически устраняются при точном соблюдении правил. При необходимости оценку точности удобно проводить в виде *поправок.*

Погрешность отсчета $\Delta_{\text{отсч}}$ *прибора с непрерывным отчетом* (указатель такого прибора может находиться в любом месте между двумя штрихами шкалы) принимается равной половине цены деления шкалы, так как при отсчете результата делается ошибка не более половины деления ($\Delta_{\text{отсч}} = c/2$).

Погрешность отчета $\Delta_{\text{отсч}}$ *прибора с дискретным отсчетом* (такой прибор имеет числовую шкалу либо указатель, который двигается скачкообразно) равна цене деления шкалы или единице числа ($\Delta_{\text{отсч}} = c$).

Если граница измеряемого объекта не может быть точно определена (например, «размытое» изображение на экране), то абсолютная погрешность определяется характером нечеткости границ.

Необходимо учитывать также *методические погрешности.* Так, при измерении длины l математического маятника, в качестве которого используется шарик на нити, за Δl необходимо взять радиус шарика R, даже если длина нити l измеряется линейкой с погрешностью $\Delta_{\text{отсч}} = 0{,}5$ мм.

Цель любого измерения заключается в нахождении приближенного значения измеряемой величины, а также в оценке допускаемой погрешности. Исходными данными служат результаты прямых измерений и предварительного учета погрешностей.

Рассмотрим методы оценки погрешностей при прямых и косвенных измерениях.

Прямые измерения

1. Если результаты прямых повторных измерений x_i отличаются друг от друга, (что указывает на наличие случайных погрешностей), то за приближенное значение измеряемой величины принимается среднее арифметическое результатов прямых измерений:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i . \tag{1}$$

В общем случае погрешности прямых измерений определяются вкладом как случайных, так и систематических ошибок и должны оцениваться в форме ориентировочной доверительной погрешности по формуле:

$$\Delta x = \gamma \sqrt{\sigma_{\text{сл}}^2 + \sigma_{\text{ин}}^2 + \sigma_{\text{отсч}}^2 + \ldots}\,, \tag{2}$$

где γ — коэффициент неравенства Чебышева для заданной доверительной вероятности α (табл. XIII).

Вклад случайных погрешностей оценивается *стандартным отклонением среднего арифметического* $\overline{x}$ результатов измерений:

$$\sigma_{\text{сл}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n} (\overline{x} - x_i)^2}\,. \tag{3}$$

Оценки всех других погрешностей (инструментальной $\sigma_{\text{ин}}$, отсчета $\sigma_{\text{отсч}} \ldots$) также представляются в форме стандартных отклонений. Если какая-либо из погрешностей имеет предельную форму Δ, то принимается $\sigma = \Delta/3$, а для погрешностей отсчета $\sigma_{\text{отсч}} = c/\sqrt{12}$, где c — цена деления шкалы.

При использовании высокоточных приборов и корректных методов величинами $\sigma_{\text{ин}}$, $\sigma_{\text{отсч}}$ в формуле (2) можно пренебречь (на практике отбрасывают все несущественные $\sigma \le \sigma_{\max}/3$, где $\sigma_{\max}$ — наибольшее из стандартных отклонений).

Если остаются только случайные погрешности, их оценка дается в форме доверительного интервала:

$$\Delta x = \sigma\, t_{\alpha\, n}\,, \tag{4}$$

где $t_{\alpha n}$ — коэффициент Стьюдента для заданной доверительной вероятности α . В этом случае с увеличением числа измерений точность повышается (т. к. для заданной α уменьшается $t_{\alpha n}$ и, следовательно, Δx). Однако она не может превышать точности прибора. Поэтому число измерений следует увеличивать лишь до тех пор, пока случайная погрешность не станет сравнимой с инструментальной ($\sigma_{\text{сл}} \approx \sigma_{\text{ин}}$).

2. Если при повторных измерениях получается один и тот же результат, (что указывает на незначительный вклад случайных погрешностей), то увеличение числа измерений не имеет смысла. Этот результат и принимается за приближенное значение измеряемой величины $\overline{x}$.

Погрешность в этом случае оценивается в предельной форме ($\alpha = 1$) как сумма:

$$\Delta x = \Delta_{\text{ин}} + \Delta_{\text{отсч}} + \ldots$$

Косвенные измерения

При косвенных измерениях за приближенное значение измеряемой величины $\overline{U}$ принимается $\overline{U} = f(\overline{x}, \overline{y}, ..., \overline{z})$, где $\overline{x}$, $\overline{y}$, …, $\overline{z}$ — среднеарифметические значения результатов прямых измерений. Погрешность косвенных измерений включает в себя погрешности всех величин, входящих в уравнение измерения, а также погрешности вычислений.

1. Если погрешности всех аргументов можно оценить вероятностно (т. е. найти σ_x, σ_y, …, σ_z), то и для погрешности функции необходимо давать вероятностную оценку:

$$\Delta U = \gamma\sigma_{\text{и}},$$

где стандартное отклонение функции $\sigma_{\text{и}}$ вычисляется по формуле:

$$\sigma_{\text{и}} = \sqrt{\left(\frac{df}{dx}\sigma_x\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\sigma_y\right)^2 + \ldots + \left(\frac{df}{dz}\sigma_z\right)^2}\ .$$

Если функция удобна для логарифмирования, т. е. содержит произведения, частные, степени и т. п., то проще вычислять по формуле:

$$\sigma_{\text{и}} = \left|\overline{U}\right|\sqrt{\left(\frac{d\ln f}{dx}\sigma_x\right)^2 + \left(\frac{d\ln f}{dy}\sigma_y\right)^2 + \ldots + \left(\frac{d\ln f}{dz}\sigma_z\right)^2}\ .$$

П р и м е ч а н и е . Если при обработке результатов прямых измерений уже вычислены доверительные погрешности Δx, Δy, …, Δz всех аргументов с одинаковой вероятностью α , то доверительную погрешность функции с этой же вероятностью можно вычислять по формуле:

$$\Delta U = \sqrt{\left(\frac{df}{dx}\Delta x\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\Delta y\right)^2 + \ldots + \left(\frac{df}{dz}\Delta z\right)^2}\,,$$

или

$$\Delta U = \left|\overline{U}\right|\sqrt{\left(\frac{d\ln f}{dx}\Delta x\right)^2 + \left(\frac{d\ln f}{dy}\Delta y\right)^2 + \ldots + \left(\frac{d\ln f}{dz}\Delta z\right)^2}\,.$$

2. Если погрешности аргументов можно оценить лишь в предельной форме, то оценку предельной погрешности функции следует проводить методом *границ погрешностей* (дифференциальным):

$$\Delta U = \left|\frac{df}{dx}\Delta x\right| + \left|\frac{df}{dy}\Delta y\right| + \ldots + \left|\frac{df}{dz}\Delta z\right|,$$

или

$$\Delta U = \left|\overline{U}\right|\left(\left|\frac{d\ln f}{dx}\Delta x\right| + \left|\frac{d\ln f}{dy}\Delta y\right| + \ldots + \left|\frac{d\ln f}{dz}\Delta z\right|\right),$$

где погрешности аргументов Δx, Δy, …, Δz оценены также в предельной форме. Допустимо также использование метода границ.

Вычисления

Точность вычислений должна быть достаточной для того, чтобы не ухудшать точности вычисленных результатов. В то же время следует помнить, что излишняя точность вычислений не может повысить точности измерений. Достаточно, чтобы относительная погрешность вычислений была на один-два порядка меньше суммарной относительной погрешности измерений. Например, если суммарная погрешность результата составляет 10 %, т. е. сомнительной является вторая значащая цифра результата, то вычисления необходимо вести до трех-четырех значащих цифр с тем, чтобы округлить результат до двух цифр.

Величину же погрешности следует рассчитывать не более чем до трех значащих цифр, округляя затем до одной-двух. Более высокая точность оценки погрешностей в учебной лаборатории является излишней. Точность записи результата должна соответствовать точности измерений и вычислений. Так, запись $t = (1{,}2134 \pm 0{,}2)$ с неверна, результат следует округлить с учетом погрешности $t = (1{,}2 \pm 0{,}2)$ с. Иногда приходится пользоваться табличными или заранее измеренными величинами. Если при этом не указана погрешность, ее считают равной половине последней значащей цифры (например, $9{,}8 \pm 0{,}05$ или $9{,}81 \pm 0{,}005$).

Описание приборов. Для определения линейных размеров используется линейка, штангенциркуль и микрометр. Цена деления линейки равна расстоянию между двумя соседними штрихами, погрешность равна половине цены деления: $\Delta_{\text{отсч}} = c/2$.

Для повышения точности измерений служит *нониус* — дополнительная линейка к основной шкале. Деления на нониусе наносятся обычно так, что одно деление нониуса составляет $\frac{m \pm 1}{m} = 1 \pm \frac{1}{m}$ делений масштаба, где m — число делений нониуса. Именно это позволяет, пользуясь нониусом, производить отсчеты с точностью до $1/m$ части наименьшего деления основной шкалы. Таким образом, точность прибора с нониусом зависит от числа делений нониуса m и цены деления c основной шкалы: $\Delta = c/m$.

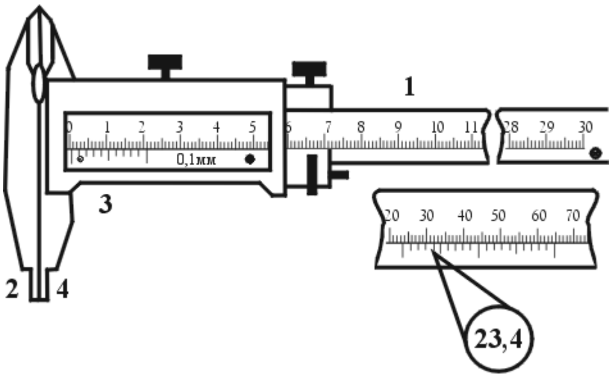

Рис. 1.4

Штангенциркуль представляет собой линейку *1* с неподвижной ножкой *2* (рис. 1.4).

По линейке перемещается дополнительная шкала с m делениями — нониус *3*. На линейке нанесена основная шкала с ценой деления 1 мм. Точность штангенциркуля зависит от числа делений *нониуса* (так, при $m = 10$ погрешность $\Delta_{\text{отсч}} = 0{,}1$ мм, при $m = 20$ — $\Delta_{\text{отсч}} = 0{,}05$ мм). При измерениях предмет помещают между ножками *2* и *4,* снимают отсчет по шкалам и находят искомую длину

$$l = kc + \frac{nc}{m},$$

где k — число наименьших делений основной шкалы (до нулевого деления нониуса), n — *номер* деления нониуса, которое в данный момент совпадает с одним из делений основной шкалы.

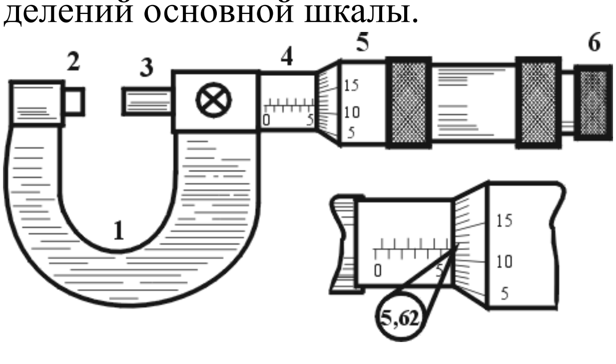

Рис. 1.5

В некоторых штангенциркулях при измерении внутренних диаметров необходимо прибавить толщину двух ножек (указывается на одной из них).

Микрометр состоит из скобы *1*, упора *2*, микрометрического винта *3*, стебля *4*, барабана *5* и головки с трещоткой *6* (рис. 1.5).

На стебле нанесена основная шкала. Деления на ней отстоят друг от друга на 0,5 мм и смещены относительно оси стебля. На барабане нанесено $m = 50$ делений нониуса, поэтому точность микрометра $\Delta_{\text{отсч}} = 0{,}01$ мм.

При измерениях предмет помещают между упором *2* и микрометрическим винтом *3*, вращают винт за головку *6* до соприкосновения с предметом и срабатывания трещотки.

Числовое значение размера измеряемого предмета находят по формуле

$$l = kc + \frac{nc}{m},$$

где k — число делений основной шкалы на стебле, n — номер деления шкалы нониуса на барабане, совпадающего с осью основной шкалы.

Порядок выполнения работы

Задание 1. Изучение микрометра и штангенциркуля.

1. Определите цену деления основных шкал и точность приборов.

Задание 2. Измерение толщины пластинки и диаметра проволоки с помощью микрометра.

1. Измерьте в разных местах толщину пластинки h и диаметр проволоки d не менее 5 раз.

2. Найдите средние значения $\overline{h}$ и $\overline{d}$, и доверительные погрешности Δh, Δd с вероятностью $\alpha = 0{,}9$.

3. Результаты запишите в таблицу:

№ п/п	Пластинка		Проволока	
	h_i, мм	$\overline{h} \pm \Delta h$, мм	d_i, мм	$\overline{d} \pm \Delta d$, мм

Задание 3. Определение объема трубки.

1. Штангенциркулем измерьте не менее 5 раз внутренний d и внешний D диаметры трубки и ее высоту h.

2. Найти средние значения $\overline{d}, \overline{D}, \overline{h}$.

3. Вычислите среднее значение обьема $\overline{V} = \frac{\pi \overline{h}}{4}\left(\overline{D}^2 - \overline{d}^2\right)$.

4. Оцените доверительную погрешность ΔV с вероятностью 0,9.

5. Результаты запишите в таблицу:

№ п/п	d, мм	D, мм	h, мм	$\overline{V} \pm \Delta V$, мм^3

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1.От чего зависит точность измерений? В каком случае при увеличении числа измерений точность не увеличивается?

2.В каком случае не учитываются погрешности прибора? От чего они зависят?

3.Можно ли статистическим методом оценить систематические погрешности?

4.Как оценить погрешности прямых измерений? Косвенных измерений?

5.С какой точностью следует производить вычисления?

6.Как производятся измерения микрометром и штангенциркулем?

7.Для чего служит нониус? От чего зависит точность прибора с нониусом? Как изменится точность прибора, если деления нониуса сделать более крупными при том же их числе?