Работа 1.3

Исследование зависимостей *T*(*l*) и *A*(*t*) математического маятника

Оборудование: штатив, маятник, линейка, электронный счетчик-секундомер.

Описание метода

Графический метод является наиболее простым и наглядным способом исследования зависимостей.

При построении графиков соблюдают определенные правила. По горизонтальной *оси абсцисс* принято откладывать *аргумент*, а по вертикальной *оси ординат* — *функцию*. Масштабы по обеим осям выбирают независимо друг от друга так, чтобы получить наилучшую наглядность. Для этого анализируют экспериментальные результаты (это легче сделать, если они оформлены в виде таблиц) и устанавливают границы изменения переменных: область определения и множество значений функции.

На графиках обычно приводят только те области изменения величин, которые экспериментально исследованы. Не надо стремиться, чтобы началом отсчета была точка (0,0). На осях указывают обозначения величин и единицы измерения, а также (при необходимости) и множители, определяющие порядок величин (например: υ , м/с; U , 10^4 В). Стрелки, указывающие направления осей, на экспериментальных графиках обычно не ставят. Масштабы наносят в виде удобных чисел, расположенных не слишком густо (например, 4, 6, 8; 5, 10, 15, …).

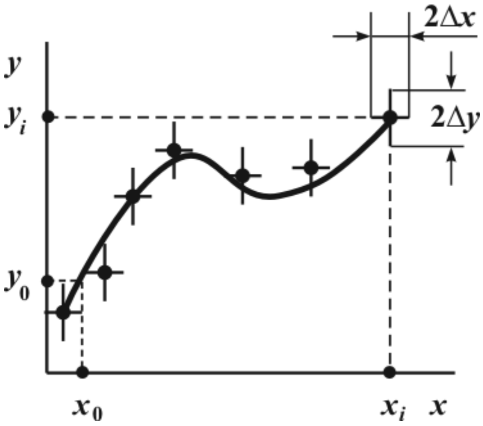

Рис. 1.6

В результате многократных измерений зависимых величин x и y при каждом конкретном условии опыта получают приближенные значения $\overline{x_i}$ и $\overline{y_i}$, а также оценки погрешностей Δx_i, Δy_i. В выбранной системе координат наносят точки с координатами (x_i, y_i). Погрешности указывают крестиками или прямоугольниками с линейными размерами $2\Delta x_i$ вдоль оси *Ox* и $2\Delta y_i$ — вдоль *Oy*, построенными около этих точек, как около центров (рис. 1.6).

Если измерения достаточно точны, крестики (прямоугольники) стягиваются в точки. Проведя через построенные около экспериментальных точек фигуры плавную кривую, получим график исследуемой зависимости $y = f(x)$.

Так, построение графика зависимости периода колебаний математического маятника от длины нити $T(l)$ начнем с анализа результатов измерений, которые для удобства оформим в виде таблицы:

№ п/п	l, м	Δl, м	$\overline{T}$, с	ΔT, с
1	0,05		0,39	0,06
2	0,13		0,63	0,07
3	0,24	0,05	0,95	0,08
4	0,39		1,2	0,1
5	0,63		1,5	0,1

Рассмотрев область определения и множество значений функции (соответственно (0,05 — 0,63) м и (0,39 — 1,5) с), выберем масштабы, нанесем на осях деления и наименования величин. Затем построим точки с координатами (l, T), а также погрешности $(\Delta l, \Delta T)$. Наконец, проведем кривую $T(l)$ (рис. 1.7).

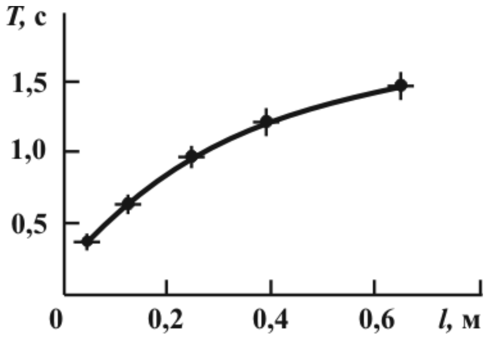

Рис. 1.7

Масштаб должен быть выбран так, чтобы график изображал все особенности исследуемой зависимости. Часто бывает удобен нелинейный (функциональный) масштаб. Если значения y изменяются на несколько порядков, то применяют, например, так называемый логарифмический масштаб, (т. е. на оси ординат откладывают не сами значения функции, а их логарифмы).

Экспериментальные точки должны быть размещены достаточно густо там, где функциональная зависимость быстро изменяется. При рациональном выборе для надежного построения простой кривой (или прямой) необходимо не менее 5 — 8 точек, а для сложной зависимости — не менее 10 — 15. Если же при измерениях результаты не осмысливать, то даже при очень большом числе опытов можно не обнаружить особенностей функции.

Выносные линии на графиках проводят лишь для указания каких-либо особенностей, например, экстремумов. Точки, соответствующие разным зависимостям, построенным на одном графике, должны обозначаться разными символами (□■ □ ●), цифрами или буквами. Все обозначения поясняются в тексте или в подписи к рисунку.

С помощью графиков можно обрабатывать экспериментальные данные: интерполировать, дифференцировать, интегрировать. Хотя графические методы менее точны, чем численные (например, метод наименьших квадратов), они просты, наглядны и часто дают неплохие результаты, поэтому широко применяются в учебных лабораториях. Рассмотрим некоторые наиболее распространенные случаи применения графических методов на практике.

1. Пользуясь графиком, можно в пределах произведенных наблюдений находить значения y для таких x, которые непосредственно не наблюдались (задача интерполирования). Для этого из любой точки x_0 оси *Ox* необходимо провести перпендикуляр до пересечения с кривой (рис. 1.6). Длина перпендикуляра и будет равна значению y_0 для соответствующего x_0.

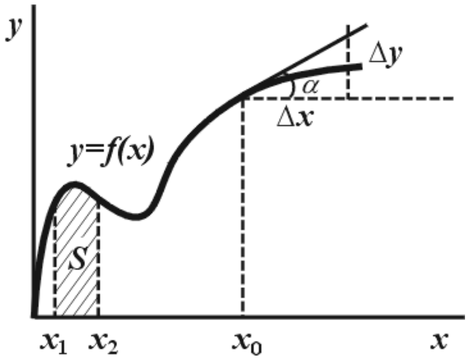

Рис. 1.8

2. Для нахождения производной функции $y = f(x)$, заданной графически, необходимо провести касательную к кривой в данной точке x_0 (рис. 1.8) и определить тангенс угла ее наклона (угловой коэффициент):

$$f'(x_0) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg}\alpha \cdot$$

Для получения наибольшей точности масштаб следует выбрать так, чтобы угол наклона был близок к 45°.

3. Определенный интеграл численно равен площади фигуры, ограниченной кривой $y = f(x)$, прямыми $x = x_1$, $x = x_2$, и осью абсцисс (рис. 1.8). Площадь сложной фигуры легко найти, подсчитав клетки миллиметровой бумаги. Для получения правильных численных значений производной и интеграла обязательно следует учитывать масштабы по обеим осям.

4. По виду графика можно предположить или экспериментально подтвердить вид функциональной зависимости $y = f(x)$ между измеряемыми величинами x и y. Для этого удобно построить график в таких координатах, чтобы предполагаемая функциональная зависимость выражалась прямой линией. Масштабы на осях в этом случае могут быть нелинейными. Если предположение верно, то график должен быть прямой линией. Так, проанализировав экспериментальную зависимость $T(l)$ по таблице и по графику на рис. 1.7, можно предположить, что период колебаний математического маятника прямо пропорционален квадратному корню из его длины $T = a\sqrt{l}$. Для подтверждения этого на осях следует откладывать T и $\sqrt{l}$ или T^2 и l. Если предположение верно, получим прямую линию (рис. 1.9). Коэффициент a может быть найден по наклону этой пря-

мой, а более точно — методом наименьших квадратов. Тем самым проверяется точный вид зависимости

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

где $a = 2\pi \big/ \sqrt{g}$.

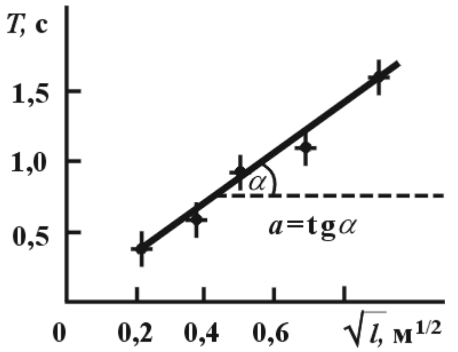

Рис. 1.9

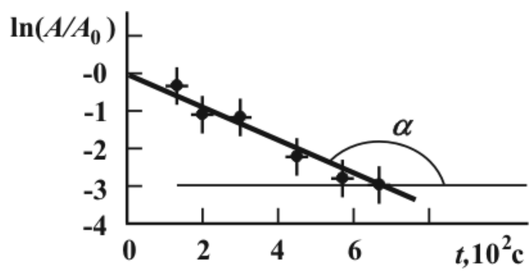

Рис. 1.10

Для доказательства того, что уменьшение амплитуды затухающих колебаний маятника происходит по экспоненциальному закону $A(t) = A_0 e^{-\beta t}$, необходимо построить график зависимости логарифма амплитуды от времени $\ln A(t) = \ln A_0 - \beta t$ или $\ln(A/A_0) = -\beta t$ (рис. 1.10). При этом должна получиться прямая, тангенс угла наклона которой равен *коэффициенту затухания* $\beta = \mathrm{tg}\alpha$.

Метод наименьших квадратов

Рассмотрим простейшую задачу, когда две измеряемые величины x и y связаны между собой линейной зависимостью: $y = ax + b$. По результатам x_i и y_i прямых измерений необходимо найти значения a и b. Парам значений x_i и y_i соответствуют некоторые точки плоскости (рис. 1.11). Задача сводится к определению параметров прямой: углового коэффициента a и значения ординаты при нулевом значении абсциссы $b = y(0)$.

Так как при любых измерениях допускаются погрешности, то можно найти лишь приближенные значения $\bar{a}$ и $\bar{b}$. *Более точные значения* будут для прямой $y = \bar{a}x + \bar{b}$, которая менее всего отклоняется от экспериментальных точек x_i и y_i.

Пусть величина x_i измеряется достаточно точно (во многих случаях удается организовать эксперимент так, что значение аргумента x_i задается), случайные погрешности Δy_i распределяются по нормальному закону, а систематические отсутствуют.

Проведем ординаты точек x_i и y_i до пересечения с прямой (рис. 1.11). Согласно методу наименьших квадратов, наилучшей будет прямая, для которой сумма квадратов разностей ординат

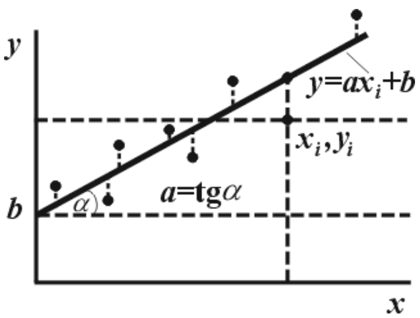

Рис. 1.11

$$Q = \sum (\Delta y_i)^2 = \sum^n (ax_i + b - y_i)^2$$

будет минимальна.

По условию минимума $\frac{dQ}{da} = 0$ и $\frac{dQ}{db} = 0$, откуда:

$$a\sum x_i + nb - \sum y_i = 0,$$

$$b\sum x_i + a\sum x_i^2 - \sum x_i y_i = 0.$$

Решив эту систему уравнений, получим параметры наилучшей прямой $y = \bar{a}x + \bar{b}$:

$$\bar{a} = \frac{A}{B}, \qquad (1)$$

$$\bar{b} = \frac{\sum y_i - \bar{a}\sum x_i}{n}. \qquad (2)$$

Стандартное отклонение рассчитывается по формулам:

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{1}{(n-2)B}\left(C - \frac{A^2}{B}\right)}, \quad \sigma_b = \sigma_a\sqrt{\frac{\sum y_i^2}{n}}, \qquad (3)$$

где

$$A = n\sum (x_i y_i) - \sum x_i \sum y_i, \quad B = n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2, \quad C = n\sum y_i^2 - \left(\sum y_i\right)^2. \qquad (4)$$

Формулы (1) — (4) приведены к виду, удобному для использования вычислительной техники.

Доверительные погрешности оцениваются по коэффициенту Стьюдента $t_{\alpha\, n-2}$ для заданной вероятности α и $n-2$ пар измерений:

$$\Delta a = t_{\alpha\, n-2}\sigma_a, \quad \Delta b = t_{\alpha\, n-2}\sigma_b.$$

Рассчитаем, например, коэффициент пропорциональности в зависимости $T(\sqrt{l})$ (рис. 1.9) с $\alpha = 0{,}8$. Вычисленные значения $a = (1{,}98 \pm 0{,}13)$ с$\cdot$м$^{-1/2}$ хорошо согласуются с теоретическими:

$$a = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} = 2{,}006.$$

Значение $b = (-5{,}4 \pm 6{,}8)\cdot 10^{-2} \approx 0$.

Следует заметить, что существует множество функций $y = f(x)$, как угодно хорошо удовлетворяющих экспериментальным точкам x_i, y_i. Поэтому, прежде всего, на основании физических законов необходимо предположить вид зависимости, а затем проверить ее соответствие результатам эксперимента.

Порядок выполнения работы

Задание 1. Исследование зависимости периода колебаний математического маятника от его длины.

1. Измерьте секундомером время t, за которое совершается n колебаний маятника при разных длинах нити l (не менее 6 — 8 длин).

2. Определите период колебаний: $T = t/n$.

3. Оцените предельные погрешности Δl и ΔT.

Указания:

- погрешность измерения длины математического маятника носит методический характер вследствие замены материальной точки реальным шариком, поэтому за Δl следует взять радиус шарика;
- погрешность измерения времени Δt в работе определяется не точностью секундомера (0,01 с), а запаздыванием реакции человека при его включении и выключении (примем $\Delta t = 0{,}5$ с);
- погрешность определения периода равна $\Delta T = \Delta t / n$ (именно поэтому экспериментально период определяется по времени достаточно большого числа колебаний, а не измерением одного колебания).

4. Результаты запишите в таблицу:

№ п/п	l, м	Δl, м	t, с	n	T, с	ΔT, с	T^2, с^2	ΔT^2, с^2

5. Постройте графики зависимостей $T(l)$, $T^2(l)$.

6. Определите по графику угловой коэффициент наклона прямой $T^2(l)$ и сравните его с теоретическим значением $4\pi^2/g$.

Задание 2. Определение аналитического выражения зависимости амплитуды колебаний маятника от времени.

1. Отклоните маятник от положения равновесия. Включите секундомер и зафиксируйте начальную амплитуду A_0. Отмечайте моменты времени, в которые маятник проходит значения амплитуды A_i (не менее 6 — 8 раз).

2. Вычислите логарифмы отношения $L_i = \ln(A_i / A_0)$.

3. Оцените предельные погрешности ΔA, ΔL, Δt.

4. Результаты запишите в таблицу:

№ п/п	A, см	L	ΔL	t, с	Δt, с

5. Постройте графики зависимостей $A(t)$, $L(t)$.

6. Графически определите коэффициент затухания β.

З а д а н и е 3 . Метод наименьших квадратов.

1. Найдите параметры «наилучшей» прямой $T^2(l) = \bar{a}l + \bar{b}$. Сравните с теоретическими.

2. Найдите параметры «наилучшей» прямой $L(t)$.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1.Как выбираются масштабы? Что обозначается на осях?

2.Как определяются погрешности на графиках?

3.В каком случае график произвольной функции $y = f(x)$ имеет вид прямой?

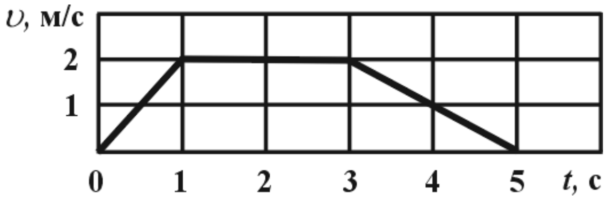

Рис. 1.12

4.Каким образом производится графическая обработка экспериментальных данных: интерполирование, дифференцирование и интегрирование?

5.Как графически установить вид функциональной зависимости $y = f(x)$?

6.По графику зависимости $\upsilon(t)$ (рис. 1.12) найдите скорость и ускорение в моменты времени 0,5; 2; 4 с, а также путь, пройденный к моментам времени 1; 2; 3; 5 с.

7.В чем заключается метод наименьших квадратов?