

Работа 1.9

Определение ускорения движения центра масс системы

Оборудование: установка, гири, секундомер, линейка.

Введение

Всякую систему тел можно рассматривать как систему взаимодействующих между собой материальных точек. При описании движения такой системы можно исследовать движение каждой ее точки, однако такой подход не раскрывает особенностей поведения системы в целом. Задача в ряде случаев значительно упрощается, если ввести понятие центра масс.

Центром масс системы материальных точек называют точку c , радиус-вектор которой равен:

$$\vec{r}_c = \frac{1}{M} \sum m_i \vec{r}_i, \quad (1)$$

где $M = \sum m_i$ — общая масса системы.

Координаты центра масс равны проекциям \vec{r}_c на координатные оси:

$$x_c = \frac{1}{M} \sum m_i x_i, \quad y_c = \frac{1}{M} \sum m_i y_i, \quad z_c = \frac{1}{M} \sum m_i z_i.$$

Дифференцируя радиус-вектор по времени, получим скорость движения центра масс:

$$\vec{v}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt}. \quad (2)$$

Если подставить значение \vec{r}_c в выражение (2), то получим:

$$\vec{v}_c = \frac{1}{M} \sum \frac{d(m_i \vec{r}_i)}{dt} = \frac{1}{M} \sum \vec{p}_i \quad \text{или} \quad \vec{v}_c = \frac{\vec{p}}{M},$$

где $\vec{p} = \sum \vec{p}_i = \sum m_i \vec{v}_i$ — импульс системы.

Отсюда

$$\vec{p} = \frac{d}{dt}(M\vec{r}_c) = M\vec{v}_c, \quad (3)$$

т. е. суммарный импульс механической системы равен импульсу, который имела бы материальная точка, расположенная в центре масс системы, если бы в ней была сосредоточена вся масса системы.

С учетом соотношения (3) второй закон Ньютона для механической системы принимает вид:

$$\frac{d(M\vec{v}_c)}{dt} = \vec{F},$$

а в случае неизменной массы: $M\vec{a}_c = \vec{F}$ где $\vec{a}_c = d\vec{v}_c/dt$ — ускорение движения центра масс, \vec{F} — результирующая всех внешних сил, действующих на систему.

Таким образом, центр масс системы движется как материальная точка с массой, равной массе системы, на которую действует сила, равная результирующей всех приложенных к системе внешних сил. Изменить характер движения центра масс могут только внешние силы.

Если система является замкнутой, т. е. сумма всех внешних сил равна нулю, то ее центр масс находится в покое или движется равномерно и прямолинейно ($\vec{v}_c = \text{const}$).

Целью работы является экспериментальная проверка *теоремы о движении центра масс механической системы*.

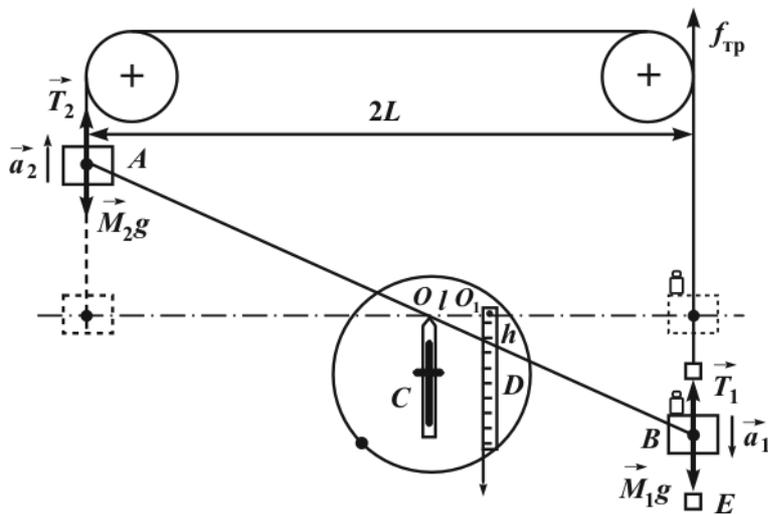


Рис. 1.31

Описание установки и метода. Для выполнения работы используется специальная установка (рис. 1.31). Грузы A и B одинаковой массы подвешены на параллельных нитях, перекинутых через легкие блоки. Груз A имеет вид цилиндра, груз B составлен из двух полуцилиндров, сложенных так, что между ними оставлена щель. Центр масс этого груза находится на стержне, соединяющем обе его половины. Посередине прямой AB , соединяющей

центры масс грузов в состоянии покоя, расположена стрелка C , которая может вращаться в горизонтальной плоскости и перемещаться поступательно. Это позволяет установить острый конец стрелки в центре масс грузов (точка O) и зажимным винтом закрепить такое положение. К острому концу стрелки прикреплена нить. Она проходит в щель груза B через его центр масс (нить переброшена через стержень в щели) и опущена вертикально вниз благодаря небольшому грузу E , закрепленному на ее конце.

Если на груз B положить перегрузок массой m , то центр масс системы сместится на расстояние l вправо вдоль нити (точка O_1). При движении системы (груз B движется вертикально вниз, груз A — вертикально вверх), центр масс системы перемещается вертикально вниз. За движением центра масс можно следить, как за движением точки пересечения натянутой нити с вертикальной прямой. С этой

прямой совмещаем край подвешенной на диске линейки D , которую можно перемещать параллельно самой себе вращением диска.

Измерив расстояние h , на которое смещается центр масс в вертикальном направлении за время t , опытным путем найдем ускорение его движения по формуле:

$$a_c = \frac{2h}{t^2}. \quad (4)$$

С другой стороны, ускорение центра масс можно рассчитать на основании законов динамики. Будем считать, что нить невесома и нерастяжима, масса блоков пренебрежимо мала, а силы трения в них можно скомпенсировать весом некоторого перегрузка: $2f_{\text{тр}} = m_1 g$.

Запишем уравнение движения центра масс системы двух грузов:

$$(M_1 + M_2) \vec{a}_c = M_1 \vec{g} + M_2 \vec{g} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2,$$

где $M_1 = M + m + m_1$ — масса груза B с обоими перегрузками, M_2 — масса груза A , \vec{a}_c — ускорение центра масс, \vec{T}_1 и \vec{T}_2 — силы натяжения нити.

Уравнение движения грузов A и B :

$$M_1 \vec{a}_1 = M_1 \vec{g} + \vec{T}_1, \quad M_2 \vec{a}_2 = M_2 \vec{g} + \vec{T}_2,$$

где \vec{a}_1 и \vec{a}_2 — ускорения каждого из грузов (для нерастяжимой нити $a_1 = a_2 = a$). Спроецировав эти уравнения на вертикальную ось, получим:

$$(M_1 + M_2) a_c = M_1 g + M_2 g - T_1 - T_2, \quad (5)$$

$$M_1 a_1 = M_1 g - T_1, \quad (6)$$

$$-M_2 a_2 = M_2 g - T_2. \quad (7)$$

Выразив из уравнений (6) и (7) силы натяжения:

$$T_1 = M_1 g - M_1 a \quad \text{и} \quad T_2 = M_2 g + M_2 a$$

и подставив их значения в (5), получим:

$$(M_1 + M_2) a_c = (M_1 - M_2) a.$$

Вычитая выражение (7) из (6), найдем ускорение движения грузов:

$$a = \frac{(M_1 - M_2) g - (T_1 - T_2)}{M_1 + M_2}.$$

Пренебрегая массой блоков, разность $T_1 - T_2$ можно принять равной силе трения в обоих блоках, т. е. $T_1 - T_2 = 2f_1 = m g$. Кроме этого, учитывая, что $M_1 - M_2 = m + m_1$ и $M_1 + M_2 = 2M + m + m_1$ для ускорения движения грузов получим:

$$a = \frac{mg}{2M + m + m_1}.$$

Откуда ускорение движения центра масс системы:

$$a_c = \frac{(m + m_1) a}{2M + m + m_1} = \frac{m(m + m_1) g}{(2M + m + m_1)^2}. \quad (8)$$

Порядок выполнения работы

1. Установите конец стрелки C в центр масс покоящихся грузов A и B и зажимным винтом зафиксируйте это положение. (Центр масс системы находится на середине прямой AB , соединяющей центры масс грузов A и B .)

2. Измерьте расстояние $L = AB/2$.

3. Подберите наименьший перегрузок массой m_1 , при котором система начинает двигаться (компенсируется сила трения). Положите его на груз B .

4. Прибавьте к грузу B перегрузки массой $m = 20 — 50$ г. Определите смещение координаты l центра масс по формуле:

$$l = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = \frac{m + m_1}{2M + m + m_1} L.$$

5. Определив новое положение центра масс, поворотом диска установите на этом расстоянии край линейки D . Зафиксируйте начальную координату y_0 центра масс (деление шкалы вертикальной линейки, против которого проходит натянутая нить).

6. Определите время t перемещения $h = y - y_0$ центра масс системы в вертикальном направлении.

7. Найдите ускорение движения центра масс по формуле (4).

8. Рассчитайте теоретическое значение a_c по формуле (8).

9. Оцените предельные погрешности.

10. Результаты запишите в таблицу:

№п/п	M , г	m , г	m_1 , г	l , см	h , см	t , с	$\bar{a}_{\text{эксп}}$, см/с ²	\bar{a} , см/с ²
------	---------	---------	-----------	----------	----------	---------	---	-------------------------------

ЗАДАНИЕ ДЛЯ УИР

Предложите способ определения ускорения центра масс, который не требует непосредственного измерения его перемещения по вертикали h . Выполните измерения и сравните результаты.



КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что называют центром масс механической системы?
2. Как определяются координаты центра масс?

3. Найдите координаты центра масс для изображенных на рис. 1.32 случаев расположения материальных точек.

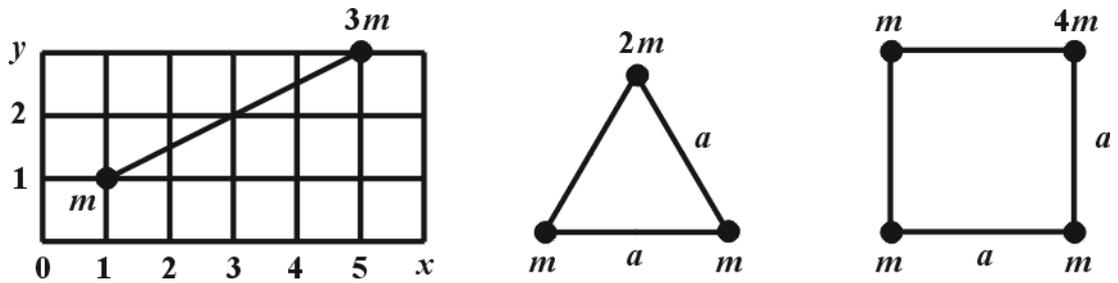


Рис. 1.32

4. Какая связь существует между координатами центра масс и центра тяжести?
5. Как можно показать аддитивность массы и импульса механической системы?
6. Какую систему называют замкнутой?
7. Запишите второй закон Ньютона для системы материальных точек.
8. Как движется центр масс замкнутой системы?
9. Сформулируйте закон сохранения импульса замкнутой механической системы через скорость движения центра масс.