Лекция №10 Механика твердого тела. Твердое тело как система материальных точек. Поступательное движение абсолютно твердого тела. Момент силы, момент инерции. Уравнение динамики вращательного движения тела относительно неподвижной оси. Пара сил.

Л-1: 6.1-6.4; Л-2: с.217-232; Л-3: §§ 44-46

Абсолютно твердым называется тело, взаимное расположение частиц которого остается неизменным при любых его движениях. Обычно говорят: «твердое тело», опуская слово «абсолютно».

Различают 5 видов движения тела: поступательное движение, вращательное движение вокруг неподвижной оси, плоскопараллельное движение, вращательное вокруг неподвижной точки, свободное движение. Любое сложное движение твердого тела может быть сведено к совокупности поступательного и вращательного движений.

Поступательным называется движение, при котором прямая, соединяющая две любые точки тела, перемещается параллельно самой себе. При этом все точки тела описывают одинаковые траектории и в любой момент времени имеют одинаковые скорости $\vec{\upsilon}$ и ускорения $\vec{a}$. Поступательное движение может быть не только прямолинейным, но и криволинейным, и в этом случае все точки тела также описывают одинаковые траектории.

Движение твердого тела называется *плоским* (или *плоскопараллельным*), если любая его точка движется в одной плоскости. При этом траектория каждой точки тела также лежит в одной плоскости, плоскости всех траекторий совпадают или параллельны. Например, кузов и колеса автомобиля совершают плоское движение, а лопасти вентилятора охлаждения относительно дороги – неплоское.

Для поступательного движения абсолютно твердого тела постоянной массы справедливо такое же уравнение, как и для материальной точки.

При поступательном движении все точки тела движутся совершенно одинаково, поэтому в задачах кинематики в принципе может быть взята любая из них. В задачах динамики следует рассматривать движение центра масс.

Вращательным называется такое движение твердого тела, при котором все его точки описывают окружности с центрами, лежащими на одной прямой, называемой *осью вращения*. Ось вращения может проходить через тело или лежать вне него.

Радиусы круговых траекторий точек вращающегося тела разные, поэтому в отличие от поступательного движения их перемещения $\Delta\vec{r}_i$, линейные скорости $\vec{\upsilon}_i$ и ускорения $\vec{a}_i$ зависят от расстояний до оси вращения и являются неудобными характеристиками вращательного движения. Одинаковыми для всех точек вращающегося твердого тела будут угол поворота φ, угловая скорость ω и угловое ускорение ε. Взятые для какой-нибудь одной точки, они характеризуют вращение всего тела.

Выделяют случаи вращательного движения вокруг *неподвижной* и *подвижной осей*.

Твердое тело может участвовать сразу в нескольких движениях. Рассмотрение сложных движений упрощается с введением понятия мгновенной оси вращения.

Мгновенной осью вращения называют ось, скорость которой в данный момент времени относительно неподвижной системы отсчета равна нулю. Положение этой оси относительно неподвижной системы с течением времени изменяется, но в каждый момент всегда найдется неподвижная ось. Она и будет мгновенной осью вращения. Это возможно в том случае, если ее положение изменяется и относительно самого тела. Например, при качении без скольжения диска или цилиндра по поверхности стола точки соприкосновения в каждый момент времени имеют нулевую относительную скорость. Совокупность этих точек и является мгновенной осью; она совпадает с образующей цилиндра.

При вращательном движении линейные кинематические характеристики – пройденный путь s, линейная скорость υ, тангенциальное ускорение a_τ – пропорциональны соответствующим угловым характеристикам, причем коэффициентом пропорциональности является радиус вращения r. Радиус играет важную роль и в динамике вращательного движения тела.

В качестве силовой характеристики вращательного движения вводится понятие момента силы. Следует отличать моменты силы относительно оси и относительно точки.

Моментом силы относительно точки O называется векторное произведение

$$\vec{M} = \left[\vec{r}, \vec{F}\right],$$

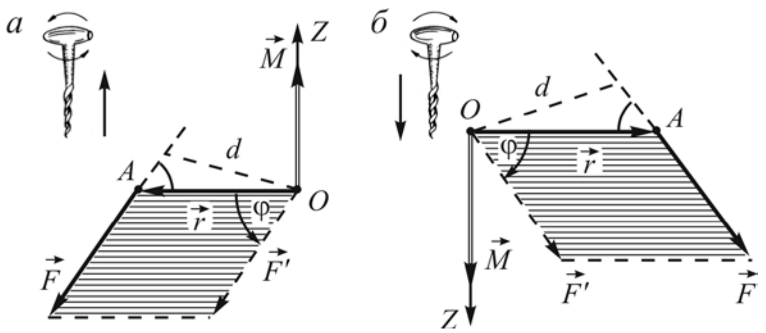

Рис. 10.1

где $\vec{r}$ – радиус-вектор, проведенный из этой точки к точке приложения силы (рис. 10.1). Вектор $\vec{M}$ перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы $\vec{r}$ и $\vec{F}$, и численно равен площади параллелограмма, сторонами которого являются данные векторы

$$M = rF\sin\varphi.$$

Направление вектора $\vec{M}$ определяется по правилу векторного произведения: если совместить точки приложения векторов $\vec{r}$ и $\vec{F}$, то кратчайший поворот от радиуса-вектора $\vec{r}$ к силе $\vec{F}$ будет происходить по часовой стрелке, если смотреть вслед вектору $\vec{M}$ (рис. 10.1, *а*). На практике удобно определять направление вектора $\vec{M}$ по *правилу правого винта:* если вращать головку винта в направлении действия силы, то его поступательное движение покажет направление момента силы $\vec{M}$.

Моментом силы относительно некоторой оси называют проекцию M_z на данную ось вектора момента этой силы $\vec{M}$ относительно любой точки, лежащей на оси. Величина M_z не зависит от выбора точки O' на оси, поскольку момент силы M при переносе точки приложения силы вдоль линии ее действия не изменяется. Из рис. 10.1 видно, что момент силы относительно точки O численно равен моменту этой силы относительно оси OZ, перпендикулярной плоскости, в которой лежат векторы $\vec{r}$ и $\vec{F}$ (а значит и точка O).

Назовем *плечом силы* кратчайшее расстояние между осью и линией действия силы

$$d = r\sin\varphi .$$

Тогда момент силы относительно этой оси может быть определен как произведение силы и плеча

$$M = Fd .$$

Такое определение момента силы дается в элементарной физике. При этом положительными считаются те моменты сил, которые вызывают вращение по часовой стрелке, а отрицательными – вызывающие вращение против часовой стрелки.

Рассмотрим действие сил на тело, способное вращаться вокруг неподвижной оси OO' (рис. 10.2). Сразу заметим, что не всякая сила будет вызывать вращение. Так, сила $\vec{F}_A$, параллельная оси, может только деформировать эту ось. Не вызовет вращения и сила $\vec{F}_B$, лежащая в плоскости, перпендику-

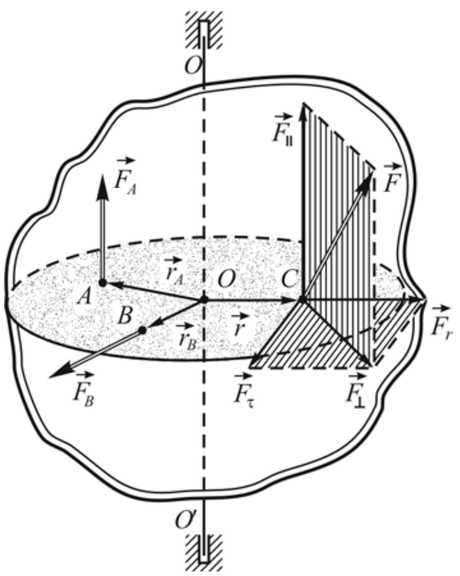

Рис. 10.2

лярной оси вращения, если линия, вдоль которой она действует, проходит через эту ось, т.е. совпадает по направлению с радиусом-вектором $\vec{r}_B$, проведенным в точку ее приложения B.

Вызвать вращение тела вокруг неподвижной оси может только сила или ее составляющая, которая лежит в плоскости, перпендикулярной данной оси, и не совпадает по направлению с радиусом-вектором, проведенным в этой плоскости к точке ее приложения. Силу, образующую произвольный угол с осью вращения, можно спроецировать на перпендикулярную плоскость, а затем разложить на тангенциальную $\vec{F}_\tau$ и радиальную $\vec{F}_r$ составляющие. Именно тангенциальная составляющая силы создает момент относительно оси $M = F_\tau r$ и является причиной тангенциального ускорения точки тела, к которой она приложена, т.е. вызывает изменение модуля линейной скорости этой точки при вращательном движении.

Система двух параллельных сил одинаковой величины, но противоположного направления, не лежащих на одной прямой и приложенных в различных точках, называется *парой сил*. Рассмотрим характер движения свободного тела под действием пары сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, приложенных в точках *A* и *B* (рис. 10.3, a). Поскольку силы равны и противоположно направлены ($\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$), то они лежат в одной плоскости и их сумма равна нулю: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$. В соответствии с уравнением динамики поступательного движения абсолютно твердого тела центр масс C остается неподвижным или сохраняет равномерное прямолинейное движение ($\vec{a}_c = 0$).

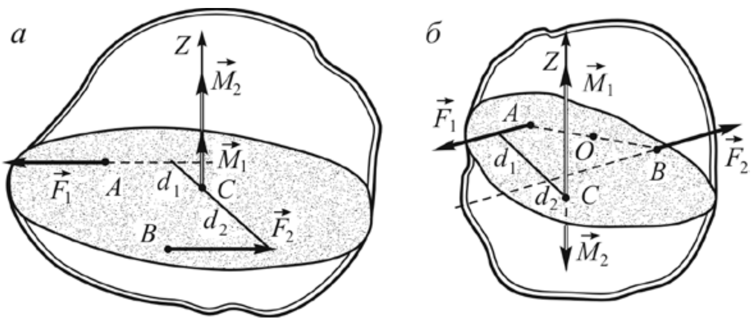

Рис. 10.3

Таким образом, пара сил не может изменить поступательного движения тела, но она вызывает вращение вокруг оси CZ, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости, в которой лежат силы (в данном случае против часовой стрелки, если смотреть с вершины оси CZ). Вдоль этой же оси направлен суммарный момент данных сил: $\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2$.

Для сил, лежащих по разные стороны центра масс, численное значение суммарного момента

$$M = M_1 + M_2 = F_1 d_1 + F_2 d_2 = Fd,$$

где d_1 и d_2 – плечи сил.

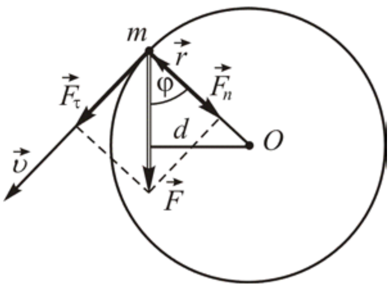

Рис. 10.4

Расстояние между линиями действия сил называют *плечом пары*. В нашем случае $d = d_1 + d_2$.

Рассмотрим сначала движение одной материальной точки массой m по окружности радиусом r под действием силы $\vec{F}$ (рис. 10.4). Пусть сила $\vec{F}$ лежит в плоскости чертежа, тогда движение точки будет плоским и может рассматриваться как вращение или вокруг центра O, или вокруг оси OZ, проходящей через этот центр перпендикулярно плоскости чертежа. Тангенциальная составляющая силы $F_\tau = F \sin\varphi$ сообщает точке тангенциальное ускорение a_τ, которое согласно второму закону Ньютона

$$ma_\tau = F \sin\varphi.$$

Выразим a_τ через угловое ускорение ($a_\tau = \varepsilon r$) и, умножив обе части последнего равенства на r, получим:

$$mr^2\varepsilon = Fr \sin\varphi.$$

Правая часть последнего уравнения представляет собой момент силы M относительно центра O (или относительно оси OZ, перпендикулярной плоскости чертежа).

Величина, равная произведению массы точки и квадрата расстояния от нее до оси вращения, называется *моментом инерции* точки относительно этой оси

$$I = mr^2 .$$

При использовании момента силы и момента инерции равенство принимает вид

$$I\varepsilon = M .$$

Сравнивая это выражение со вторым законом Ньютона для поступательного движения, приходим к выводу, что при описании вращательного движения с помощью углового ускорения роль массы выполняет момент инерции, а роль силы – момент силы.

Установим теперь связь между угловым ускорением и моментом сил, действующих на тело, вращающееся вокруг неподвижной оси (рис. 10.5). Разобьем мысленно тело на малые элементы массами Δm_i, которые можно считать материальными точками, т.е. будем рассматривать твердое тело как систему материальных точек с неизменными расстояниями между ними. При вращении тела вокруг неподвижной оси OO' его точки двигаются по окружностям радиусов r_i, которые лежат в плоскостях, перпендикулярных оси вращения.

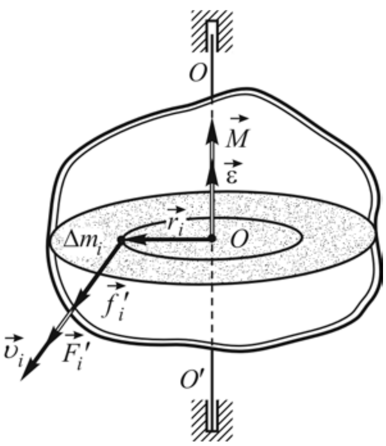

Рис. 10.5

Пусть на каждую точку действует внешняя сила $\vec{F}_i$ и сумма внутренних сил $\vec{f}_i = \sum_j \vec{f}_{ij}$ со стороны остальных частиц системы. Поскольку точки движутся по плоским окружностям с тангенциальными ускорениями $a_{\tau i}$, то это ускорение вызывают касательные составляющие сил F_i' и f_i'.

Запишем второй закон Ньютона для тангенциального ускорения i-й точки

$$\Delta m_i a_i = F_i' + f_i'.$$

Умножив обе части последнего равенства на r_i и выразив тангенциальные ускорения точек через угловое, одинаковое для всех точек тела ($a_i = r_i\varepsilon$), получим:

$$\Delta m_i r_i^2 \varepsilon = r_i F_i' + r_i f_i'.$$

Просуммируем по всем точкам системы, учитывая, что сумма моментов всех внутренних сил равна нулю. Действительно, все внутренние силы можно сгруппировать на попарно равные и противонаправленные. Силы каждой пары лежат на одной прямой, поэтому имеют одинаковые плечи, а значит равные, но противонаправленные моменты. В результате получаем уравнение вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси как системы материальных точек

$$\sum_i \Delta m_i r_i^2 \varepsilon = \sum_i r_i F_i'.$$

Сумма моментов внешних сил, действующих на тело, равна моменту результирующей этих сил относительно оси OO':

$$M = \sum_i r_i F_i'.$$

Моментом инерции тела относительно некоторой оси называют сумму моментов инерции всех его точек относительно той же оси:

$$I = \sum_i I_i = \sum_i \Delta m_i r_i^2.$$

С учетом полученных соотношений, определяющих понятия момента инерции тела I и суммарного момента сил M, имеем:

$$I\varepsilon = M.$$

Это выражение называют *уравнением динамики вращательного движения* твердого тела вокруг неподвижной оси.

Вектор углового ускорения тела $\vec{\varepsilon}$ совпадает по направлению с вектором момента сил $\vec{M}$ относительно неподвижной оси, а момент инерции тела – величина скалярная, следовательно, предыдущее уравнение можно записать в векторной форме:

$$I\vec{\varepsilon} = \vec{M} .$$

Из этого уравнения можно выразить угловое ускорение

$$\vec{\varepsilon} = \frac{\vec{M}}{I} . \; (*)$$

Полученное уравнение (*) называют *вторым законом Ньютона для вращательного движения твердого тела*. Отличие от поступательного движения заключается в том, что вместо линейного ускорения $\vec{a}$ используется угловое $\vec{\varepsilon}$, роль силы $\vec{F}$ выполняет момент силы $\vec{M}$, а роль массы m – момент инерции I.

В динамике поступательного движения равными силами считаются те, которые сообщают телам равной массы одинаковые ускорения. При вращательном движении одна и та же сила может сообщать телу разные угловые ускорения в зависимости от того, как далеко лежит линия действия силы от оси вращения. Поэтому, например, велосипедное колесо легче привести в движение, прикладывая силу к ободу, чем к середине спицы.

Разные тела получают под действием одинаковых моментов сил одинаковые угловые ускорения, если равны их моменты инерции. Момент инерции зависит от массы и ее распределения относительно оси вращения. Поскольку угловое ускорение обратно пропорционально моменту инерции, то при прочих равных условиях тело легче привести в движение, если его масса сконцентрирована ближе к оси вращения.