Лекция №11 Момент импульса. Закон сохранения момента импульса твердого тела, примеры его проявления. Вычисление моментов инерции тел. Теорема Штейнера. Кинетическая энергия вращающегося твердого тела.

Л-1: 6.5-6.9; Л-2: с.233-254; Л-3: §§ 30, 32, 33, 35, 36

При выводе основного уравнения динамики вращательного движения предполагалось постоянство во времени моментов инерции твердого тела и составляющих его точек. Более общее соотношение можно получить, вводя понятие момента импульса $\vec{L}$.

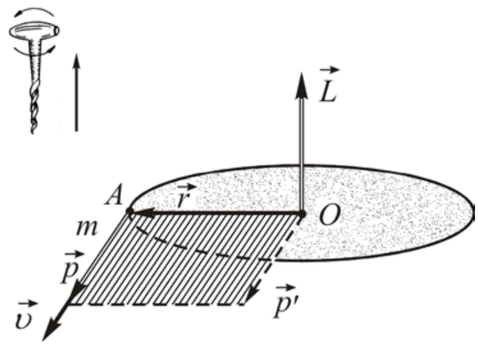

Рис. 11.1

Пусть материальная точка *A*, движущаяся по окружности радиуса $\vec{r}$, обладает импульсом $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$ (рис. 11.1). *Моментом импульса материальной точки A относительно некоторой точки O* называют векторное произведение радиуса-вектора, проведенного из точки *O* в данную точку *A*, и вектора импульса

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}] = [\vec{r}, m\vec{\upsilon}]. \qquad (*)$$

Вектор $\vec{L}$ перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы $\vec{r}$ и $\vec{p}$, и численно равен площади параллелограмма, сторонами которого являются эти векторы

$$L = rp\sin\varphi = rm\upsilon\sin\varphi.$$

При движении точки по окружности ее скорость перпендикулярна радиусу, поэтому $\sin\varphi = 1$.

Направление вектора $\vec{L}$ определяется, как и $\vec{M}$, по правилу векторного произведения. Отметим, что векторы $\vec{L}$ и $\vec{M}$ являются аксиальными.
Моментом импульса относительно некоторой оси называется проекция на эту ось момента импульса относительно любой точки, которая лежит на оси.

Выразив линейную скорость точки через угловую $\upsilon = \omega r$, получаем

$$L = mr^2\omega = I\omega .$$

Целесообразность введения момента импульса оправдана тем, что он связан с моментом силы важными соотношениями, которые можно получить из закона динамики. Продифференцируем выражение (*) по времени

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}[\vec{r}, \vec{p}] = \left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{p}\right] + \left[\vec{r}, \frac{d\vec{p}}{dt}\right].$$

Если точка *O* (ось *OZ*) неподвижна, то производная $d\vec{r} / dt = \vec{\upsilon}$ и первое слагаемое равно нулю как векторное произведение коллинеарных векторов $\left[\vec{\upsilon}, m\vec{\upsilon}\right] = 0$. Второе слагаемое можно преобразовать с помощью закона динамики: $d\vec{p} / dt = \vec{F}$. Тогда получим

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left[\vec{r}, \vec{F}\right] \text{ или } \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} .$$

Полученное соотношение называется *уравнением моментов* для материальной точки: скорость изменения момента импульса материальной точки относительно неподвижной точки равна *моменту действующих сил* относительно той же точки. Оно справедливо при любом движении материальной точки (в том числе переменной массы) по произвольной траектории. Уравнение моментов можно обобщить на случай произвольной системы материальных точек.

Моментом импульса системы материальных точек относительно некоторой точки *O* (или оси *OZ*) называют сумму моментов импульсов всех материальных точек относительно той же точки (оси)

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i [\vec{r}_i, \vec{p}_i].$$

Запишем уравнения моментов для всех точек системы и сложим их. При этом на внутренние силы внимания можно не обращать, поскольку, как уже отмечалось, их суммарный момент относительно любой точки равен нулю.

Мы снова придем к уравнению моментов, но уже для системы материальных точек

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{BH},$$

где $\vec{M}_{BH}$ – суммарный момент всех внешних сил, действующих на систему.

Последнее уравнение можно переписать в виде:

$$d\vec{L} = \vec{M}_{вн} dt.$$

Произведение момента силы и времени ее действия называют *импульсом момента силы*. Тогда из выражения следует, что изменение момента импульса системы за конечный интервал времени равно импульсу суммарного момента всех внешних сил, действующих на систему относительно той же точки, за то же время

$$\Delta\vec{L} = \vec{L}_2 - \vec{L}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_{вн} dt.$$

Формулы $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{BH}$ и $d\vec{L} = \vec{M}_{BH} dt$ являются наиболее общими формами записи закона динамики вращательного движения, поскольку они справедливы для тел и механических систем как с постоянным, так и с переменным моментом инерции.

Из уравнения динамики вращательного движения следует, что *если суммарный момент внешних сил равен нулю, то момент импульса тела или системы тел остается постоянным*

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \mathrm{const}\,\cdot$$

Для замкнутой механической системы условие равенства нулю суммарного момента внешних сил выполняется всегда.

При неизменном моменте инерции тела и равном нулю моменте внешних сил угловая скорость вращения будет постоянной как по величине, так и по направлению. Если момент инерции тела изменяется, то одновременно должна изменяться и угловая скорость его вращения, чтобы произведение $\vec{L} = I\vec{\omega}$ оставалось постоянным. Изменение момента инерции тела может происходить под действием внутренних сил, вызывающих перемещение частей тела.

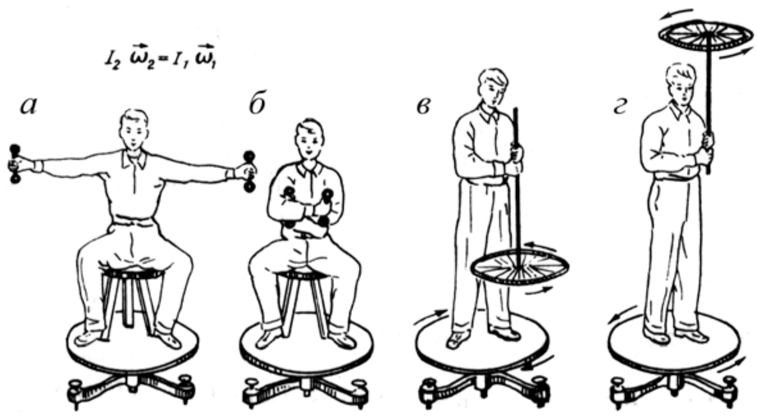

Рис. 11.2

Яркой демонстрацией закона сохранения момента импульса служат опыты со скамьей Жуковского, которая представляет собой металлическую платформу, способную вращаться относительно вертикальной оси с малым трением (рис. 11.2).

Фигурист на коньках или балерина, чтобы сообщить своему телу быстрое вращение, при первом толчке разводят руки в стороны, а затем приближают их к телу. В результате момент инерции тела уменьшается, а скорость вращения возрастает.

Закон сохранения момента импульса позволяет при изучении вращательного движения исключить из рассмотрения моменты внутренних сил. При соответствующем выборе осей исключается также действие ряда внешних сил, моменты которых относительно выбранных осей равны нулю. Поэтому он широко применяется в технических расчетах.

Этот закон имеет важное значение для современной физики, где понятие момента импульса расширяется на немеханические системы и постулируется сохранение момента импульса для всех физических процессов. Так, каждая элементарная частица (протон, нейтрон) обладает собственным моментом импульса (спином). Сумма этих моментов сохраняется, например, в ядерных реакциях, которые сопровождаются превращением одних элементарных частиц в другие. При этом могут выполняться законы сохранения и других физических величин: импульса, энергии и др.

Каждое тело независимо от того, вращается оно или находится в состоянии покоя, обладает определенным моментом инерции относительно любой выбранной оси подобно тому, как тело имеет массу независимо от его состояния движения или покоя. Таким образом, момент инерции является мерой инертности тела при вращательном движении. Очевидно, что проявляется момент инерции только тогда, когда на тело начинает действовать момент внешних сил, который вызывает угловое ускорение.

Согласно определению момент инерции – величина аддитивная. Это означает, что момент инерции тела относительно некоторой оси равен сумме моментов инерции отдельных его частей. Отсюда следует метод расчета моментов инерции тел.

Для вычисления момента инерции необходимо мысленно разбить тела на достаточно малые элементы Δm_i , точки которых лежат на одинаковом расстоянии r_i от оси вращения, затем найти произведение массы каждого элемента и квадрата его расстояния до оси и, наконец, просуммировать все произведения. Чем больше элементов берется, тем точнее метод. В случае, когда тело разбивается на бесконечно большое количество бесконечно малых элементов dm , суммирование заменяется интегрированием по всему объему тела

$$I = \lim_{\Delta m_i \to 0} \sum_i \Delta m_i r_i^2 = \int r^2 dm\,.$$

Для тела с неравномерным распределением массы формула $\rho = m/V$ дает среднюю плотность. В этом случае плотность в данной точке определяется как предел отношения массы бесконечно малого элемента Δm к его объему ΔV

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}.$$

Отсюда можно выразить элементарную массу через плотность и элементарный объем

$$dm = \rho dV .$$

Расчет момента инерции произвольных тел является довольно трудоемкой задачей. Приведем в качестве примера вычисление моментов инерции некоторых однородных тел правильной геометрической формы относительно их осей симметрии.

Вычислим момент инерции сплошного цилиндра (диска) радиусом R, толщиной h и массой m относительно оси, проходящей через центр перпендикулярно основанию цилиндра. Разобьем цилиндр на тонкие кольцевые слои радиусом r и толщиной dr (рис. 11.3, *a*).

Поскольку $dr << r$, то можем считать, что расстояние всех точек слоя от оси равно r. Для каждого отдельного такого кольцевого слоя момент инерции

$$i = \sum \Delta m r^2 = r^2 \sum \Delta m ,$$

где $\sum \Delta m$ – масса всего слоя. Объем слоя $2\pi rhdr$, где h – высота слоя. Если плотность материала цилиндра ρ, то масса слоя будет $2\pi rhdr$, а его момент инерции $i = 2\pi\rho hrdr$. Для вычисления момента инерции цилиндра необходимо просуммировать моменты инерции слоев от центра цилиндра ($r = 0$) до его края ($r = R$), т.е. вычислить интеграл:

$$I = \int_0^R r^2 dm = 2\pi\rho h \int_0^R r^3 dr , \quad \text{или} \quad I = \frac{1}{2}\pi\rho h R^4 .$$

С учетом того, что масса цилиндра $m = \pi\rho h R^2$, получим:

$$I = \frac{1}{2} m R^2 .$$

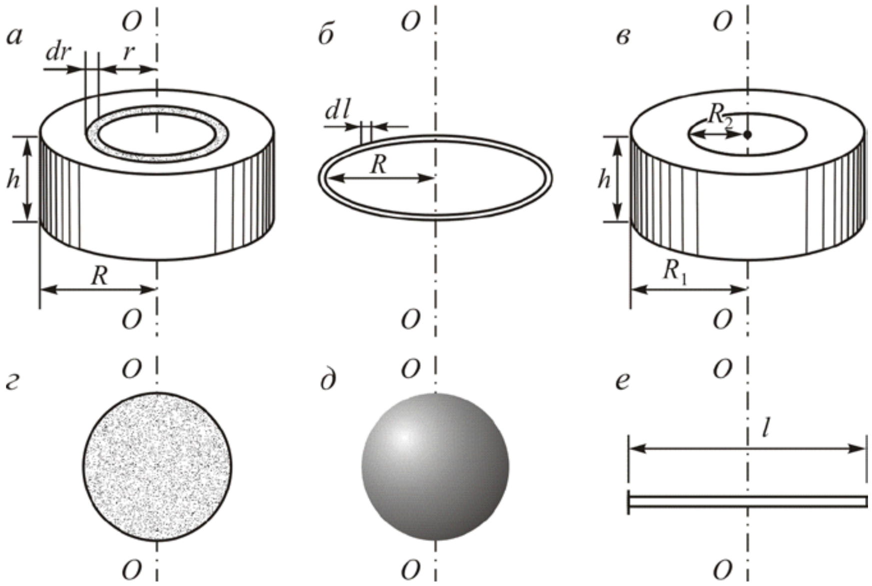

Рис. 11.3

Приведем без вывода моменты инерции некоторых других тел, выполненных из однородных материалов, часто встречающиеся при решении задач.

1. Момент инерции тонкого кольца относительно оси, проходящей через центр симметрии перпендикулярно плоскости кольца (рис. 11.3, б)

$$I = mR^2.$$

2. Момент инерции толстостенного цилиндра массой m и радиусами R_1 и R_2 относительно оси симметрии (рис. 11.3, *в*)

$$I = \frac{1}{2}m\left(R_1^2 + R_2^2\right).$$

3. Момент инерции диска относительно оси, совпадающей с его диаметром, (рис. 11.3, *г*)

$$I = \frac{1}{4}mR^2.$$

4. Момент инерции шара относительно оси, совпадающей с его диаметром, (рис. 11.3, *д*)

$$I = \frac{2}{5}mR^2.$$

5. Момент инерции тонкого стержня длиной l и массой m относительно оси, проходящей через его центр перпендикулярно стержню, (рис. 11.3, *е*)

$$I = \frac{1}{12}ml^2.$$

Нахождение момента инерции в рассматриваемых примерах значительно упрощалось потому, что тела были однородными и симметричными, а моменты инерции вычислялись относительно осей, проходящих через их центры инерции (центры масс). Вычисление момента инерции тела относительно произвольной оси также упрощается, если известен момент инерции тела относительно оси, которая параллельна данной и проходит через его центр инерции. Отметим, что ось, относительно которой вычисляется момент инерции, может находиться внутри тела или вне его.

Момент инерции тела относительно произвольной оси определяется при помощи теоремы Штейнера: момент инерции тела I относительно произвольной оси равен сумме момента инерции I_c относительно оси, которая проходит через центр инерции параллельно данной, и произведению массы тела m на квадрат расстояния между осями.

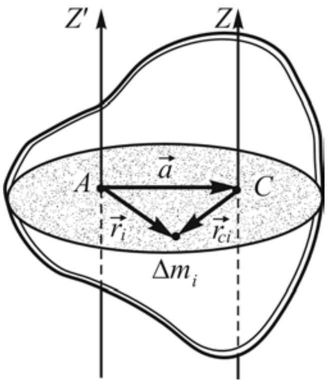

Рис. 11.4

Пусть ось *Z* проходит через центр инерции твердого тела, а ось Z' – параллельно ей и находится на расстоянии a (рис. 11.4). Введем перпендикулярный обеим осям вектор $\vec{a}$, который соединяет соответствующие точки осей *A* и *C*, лежащие в одной плоскости. Для любой перпендикулярной осям плоскости он имеет одинаковую величину. Положение элементарной массы Δm_i относительно осей определяется радиусами-векторами $\vec{r}_i$ и $\vec{r}_{ci}$, причем $\vec{r}_i = \vec{a} + \vec{r}_{ci}$.

Вычислим момент инерции тела относительно оси Z'

$$I = \sum_i \Delta m_i \vec{r}_i^{\,2} = \sum_i \Delta m_i \left(\vec{a} + \vec{r}_{ci}\right)^2 .$$

Раскрывая скобки и выполняя соответствующие преобразования, получим:

$$I = a^2 \sum_i \Delta m_i + 2\vec{a} \sum_i \Delta m_i \vec{r}_{ci} + \sum_i \Delta m_i r_{ci}^2 .$$

Первое слагаемое равно произведению массы тела и квадрата расстояния между осями ma^2, третье – моменту инерции тела относительно оси, проходящей через центр инерции:

$$I_c = \sum_i \Delta m_i r_{ci}^2 .$$

Второе слагаемое $2\vec{a}\sum \Delta m_i \vec{r}_{ci} = 0$ (поскольку ось проходит через центр инерции, то $\vec{r}_c = 0$).

Таким образом,

$$I = I_c + ma^2 .$$

Как видно, теорема Штейнера сводит определение момента инерции относительно произвольной оси к вычислению момента инерции относительно оси, проходящей через центр инерции тела.

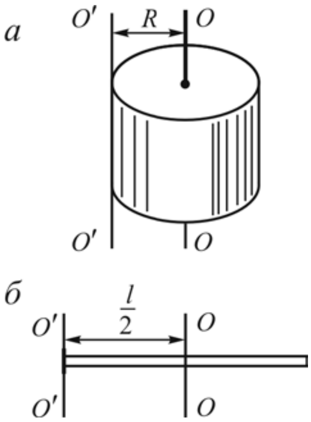

Рис. 11.5

Например, момент инерции сплошного цилиндра радиусом R и массой m относительно оси, совпадающей с его образующей (рис. 11.5, *а*),

$$I = \frac{3}{2} mR^2 .$$

Момент инерции тонкого стержня массой m и длиной l относительно оси, проходящей перпендикулярно стержню через его конец (рис. 11.5, *б*),

$$I = \frac{1}{3} ml^2 .$$

Кинетическая энергия твердого тела равна сумме кинетических энергий составляющих его материальных точек

$$E_к = \sum_i \frac{\Delta m_i \upsilon_i^2}{2},$$

где Δm_i – масса i-й точки; υ_i – ее скорость.

Рассмотрим сначала случай вращения тела вокруг неподвижной оси. Выразив в предыдущей формуле линейную скорость i-й точки через угловую скорость ω и расстояние от оси вращения через r_i, после суммирования по всем элементам получим

$$E_к = \sum_i \Delta m_i r_i^2 \frac{\omega^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum_i \Delta m_i r_i^2 .$$

Учитывая, что сумма $\sum_i m_i r_i^2$ равна моменту инерции тела I относительно выбранной оси, окончательное выражение для кинетической энергии тела, вращающегося с угловой скоростью ω вокруг неподвижной оси, имеет вид:

$$E_к = \frac{I\omega^2}{2} .$$

Можно сказать, что эта формула аналогична соответствующей формуле кинетической энергии поступательного движения. Различие между ними заключается в том, что роль линейной скорости υ играет угловая скорость ω, а массы m – момент инерции тела относительно оси вращения I .

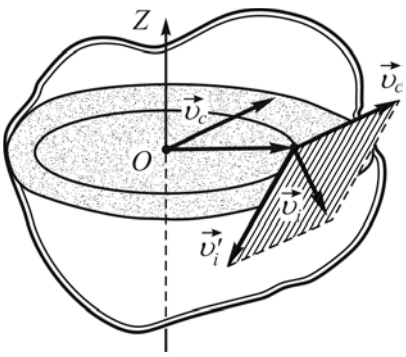

Рис. 11.6

Рассмотрим плоское движение тела. Его можно представить как сумму поступательного движения со скоростью центра масс υ_c и вращательного с угловой скоростью ω вокруг оси, проходящей через центр масс (рис. 11.6). Суммарная скорость точек тела $\vec{\upsilon}_i$ будет складываться из скорости центра масс $\vec{\upsilon}_c$ и относительной скорости $\vec{\upsilon}_i'$:

$$\vec{\upsilon}_i = \vec{\upsilon}_c + \vec{\upsilon}_i' .$$

Подставляя $\vec{\upsilon}_i$ в выражение для $E_к$, находим

$$E_к = \frac{1}{2}\sum_i \Delta m_i \upsilon_c^2 + \frac{1}{2}\sum_i \Delta m_i \upsilon_i'^2 + \sum_i \Delta m_i \vec{\upsilon}_c \vec{\upsilon}_i' \cdot$$

Учитывая, что масса тела $m = \sum_i \Delta m_i$, а относительная скорость $\vec{\upsilon}_i = \frac{d\vec{r}_{ci}}{dt}$, получаем:

$$E_к = \frac{1}{2} m\upsilon_c^2 + \frac{1}{2}\sum_i \Delta m_i \upsilon_i'^2 + \vec{\upsilon}_c \frac{d}{dt}\left(\sum_i \Delta m_i \vec{r}_{ci}\right)\cdot$$

Первое слагаемое представляет кинетическую энергию поступательного движения тела, второе – кинетическую энергию вращательного движения относительно оси, проходящей через центр масс. Как и в предыдущем случае, она равна $I_c\omega^2/2$. Третье слагаемое равно нулю, поскольку для центра масс $\sum_i \Delta m \vec{r}_{ci} = 0$.

Таким образом, полная кинетическая энергия плоского движения тела массой m складывается из кинетической энергии поступательного движения и кинетической энергии вращения вокруг оси, которая проходит через центр масс

$$E_к = \frac{m\upsilon_c^2}{2} + \frac{I_c\omega^2}{2}\cdot$$

Рассмотрим изменение кинетической энергии при вращении тела вокруг неподвижной оси.

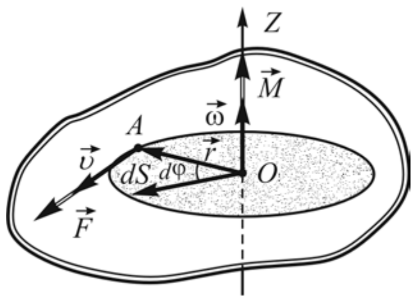

Рис. 11.7

Пусть сила $\vec{F}$ приложена в точке *A* на расстоянии r от оси, лежит в плоскости траектории и направлена по касательной к ней (рис. 11.7). Именно касательная сила создает момент $M = Fr$ относительно оси *OZ* и вызывает изменение угловой скорости.

При повороте на бесконечно малый угол $d\varphi$ перемещение точки можно считать равным длине дуги $ds = rd\varphi$. Тогда элементарная работа $dA = Fds = Frd\varphi$, или

$$dA = Md\varphi .$$

Работа при повороте на конечный угол φ равна интегралу

$$A = \int_0^{\varphi} Md\varphi, \text{ или } A = \int_0^{\varphi} \vec{M}d\vec{\varphi}.$$

Если момент силы не изменяется, то работа равна произведению момента силы и угла поворота тела

$$A = M\varphi .$$

Запишем уравнение динамики вращательного движения $M = I(d\omega / dt)$. Пусть за бесконечно малый интервал времени dt произошел поворот тела относительно оси вращения на угол $d\varphi = \omega dt$. Умножив обе части уравнения на угол поворота $d\varphi$, получим:

$$Md\varphi = I\frac{d\omega}{dt}\omega dt .$$

Проинтегрировав левую и правую части последнего соотношения, получим:

$$\int_1^2 Md\varphi = \int_1^2 I\omega d\omega$$

или

$$A_{12} = \frac{I\omega_2^2}{2} - \frac{I\omega_1^2}{2} = E_{\kappa 2} - E_{\kappa 1}.$$

Изменение кинетической энергии при вращательном движении тела равно работе момента внешних сил, который сообщает телу угловое ускорение.