Лекция №12 Понятие о твердом теле, вращающемся вокруг неподвижной точки. Свободные оси вращения. Гироскоп. Условия равновесия твердого тела. Виды равновесия.

Л-1: 6.10-6.12; Л-2: с.255-265; Л-3: §§ 49-51

Неподвижность осей вращения обеспечивается закреплением их концов в подшипниках. Рассмотрим силы реакции, действующие при вращении тела вокруг вертикальной неподвижной оси, которая составляет некоторый угол с его осью симметрии (рис. 12.1, *а*).

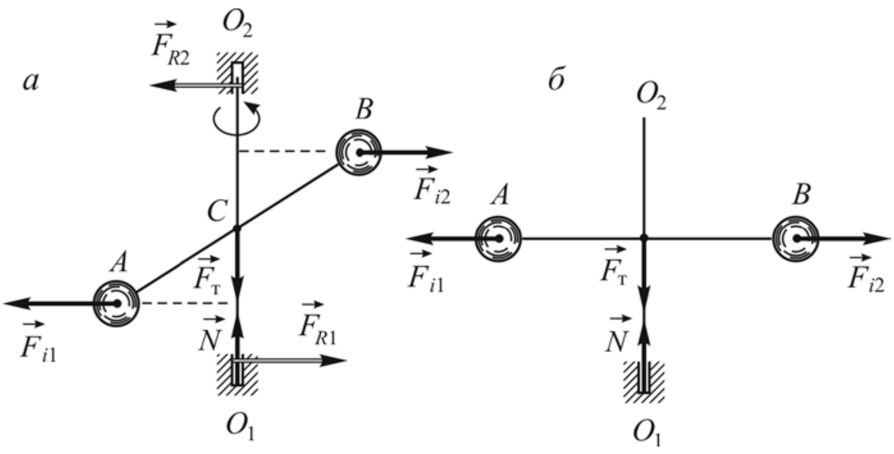

Рис. 12.1

Пусть ось проходит через центр масс тела и трение в подшипниках пренебрежимо мало. Пока тело неподвижно, на ось действует сила реакции только нижней опоры $\vec{N}$; она направлена вдоль оси вверх и уравновешивает силу тяжести тела $\vec{F}_T$, приложенную в его центре масс C. Начнем вращать тело с угловой скоростью ω. Теперь на каждую частицу массой m, находящуюся на расстоянии r от оси вращения, будет действовать еще и центробежная сила инерции $F_i = mr\omega^2$, лежащая в плоскости вращения частицы и направленная по радиусу от оси. Результирующие этих сил $\vec{F}_{i1}$ и $\vec{F}_{i2}$ образуют пару сил, которая стремится повернуть тело по часовой стрелке вокруг оси, перпендикулярной плоскости чертежа, и вызывает противонаправленные реакции подшипников $\vec{F}_{R1}$ и $\vec{F}_{R2}$.

Для каждого тела можно выбрать оси, вращение вокруг которых не вызывает появление дополнительных сил. Действительно, если рассматриваемому телу дать возможность свободно вращаться в горизонтальной плоскости, то под действием пары сил $\vec{F}_{i1}$ и $\vec{F}_{i2}$ оно повернется так, что линия *АВ* станет перпендикулярной оси вращения O_1O_2 и момент пары сил и реакции осей обратится в 0 (рис. 12.1, б). Связанная с телом ось, положение которой в пространстве сохраняется при отсутствии внешних воздействий, называется *свободной осью*.

Расчеты показывают, что в любом теле существуют три взаимно перпендикулярные свободные оси, которые пересекаются в центре масс. В общем случае момент инерции относительно одной из них максимальный, относительно другой – минимальный, а относительно третьей имеет промежуточное значение. Эти оси называют *главными осями инерции* тела, а соответствующие моменты инерции I_1, I_2, I_3 – *главными моментами инерции*.

Для тел правильной формы эти оси находятся достаточно легко. Так, у однородного параллелепипеда главными осями инерции будут оси, которые проходят через центр масс перпендикулярно его граням (рис. 12.2, *а*), причем наибольший момент инерции – I_1, а наименьший – I_3.

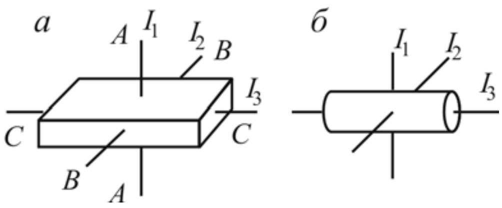

Рис. 12.2

Для однородных тел вращения главными осями инерции являются оси симметрии. Так, ось симметрии цилиндра – одна из главных осей инерции, две другие – это любые взаимно перпендикулярные оси, которые проходят через центр масс и лежат в плоскости, перпендикулярной первой оси (рис. 12.2, *б*), причем $I_1 - I_2$.

Если тело вращается вокруг одной из свободных осей (например, вокруг оси *OZ*) и на него не действуют никакие внешние силы, то согласно закону сохранения момента импульса

$$\vec{L}_z = I_z\vec{\omega} = \mathrm{const}$$

оно должно сохранять величину и направление угловой скорости, т.е. положение свободной оси.

В теоретической механике утверждается, что вращение устойчиво относительно главных осей, которые соответствуют наибольшему и наименьшему моментам инерции. Вращение вокруг главной оси, соответствующей промежуточному моменту инерции, неустойчиво. Эти утверждения легко проиллюстрировать, бросая приведенную во вращение прямоугольную коробку. Легко заставить ее вращаться вокруг осей *AA* и *CC* и невозможно – вокруг оси *BB* (рис. 12.2, *а*).

Если же на вращающееся тело действуют внешние силы, то устойчивым будет вращение только относительно оси, соответствующей наибольшему моменту инерции (в нашем примере *AA*), поскольку для этой оси будет наименьшим относительное изменение момента импульса.

Устойчивость вращения разных тел вокруг главных осей инерции можно продемонстрировать на следующем опыте.

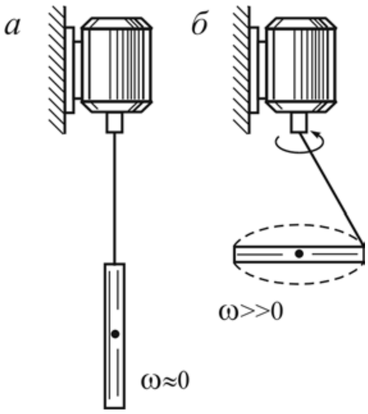

Рис. 12.3

Стержень, подвешенный за один конец при помощи нити к вертикальной оси электродвигателя, при малых скоростях ω вращается в вертикальном положении (рис. 12.3, *а*), т.е. вокруг оси с наименьшим моментом инерции. При возрастании скорости стержень вопреки действию силы тяжести размещается горизонтально и устойчиво вращается вокруг оси с наибольшим моментом инерции (рис. 12.3, *б*).

В устройствах с быстро вращающимися частями важно обеспечить их вращение вокруг свободных осей, иначе возникнут чрезвычайно высокие динамические нагрузки на оси и подшипники. Поскольку нельзя добиться абсолютно точного совпадения центра масс вращающейся части с осью вращения, которая задается подшипниками, используют гибкие или самоцентрирующиеся валы. В этом случае при довольно большой скорости вал изгибается таким образом, что вращение устанавливается вокруг свободной оси.

Главные оси инерции обладают важной особенностью: при вращении тела вокруг любой из них момент импульса тела $\vec{L}$ совпадает по направлению с угловой скоростью $\vec{\omega}$ и определяется формулой

$$\vec{L} = I\vec{\omega},$$

где I – момент инерции тела относительно данной главной оси инерции, причем если ось неподвижна, то момент импульса $\vec{L}$ не зависит от выбора точки, относительно которой его определяют.

Гироскопом называют массивное симметричное тело, вращающееся с большой угловой скоростью вокруг оси симметрии. Поскольку ось гироскопа совпадает с одной из главных осей инерции, то

$$\vec{L} = I\vec{\omega},$$

где I – момент инерции гироскопа относительно этой оси; ω – угловая скорость собственного вращения.

Если суммарный момент внешних сил, действующих на гироскоп, равен нулю, то момент его импульса постоянный. Отсюда следует важное для практического применения свойство гироскопа сохранять неизменным направление оси в пространстве.

Если к вращающемуся гироскопу приложить момент сил, который стремится повернуть его вокруг оси, перпендикулярной оси вращения гироскопа, то он станет поворачиваться вокруг третьей оси, перпендикулярной первым двум. Такое, неестественное на первый взгляд, поведение гироскопа полностью соответствует законам динамики вращательного движения.

Точное решение задачи о вращении гироскопа относительно произвольных осей сопряжено с математическими трудностями. Рассмотрим приближенное решение этой задачи для простейшего случая.

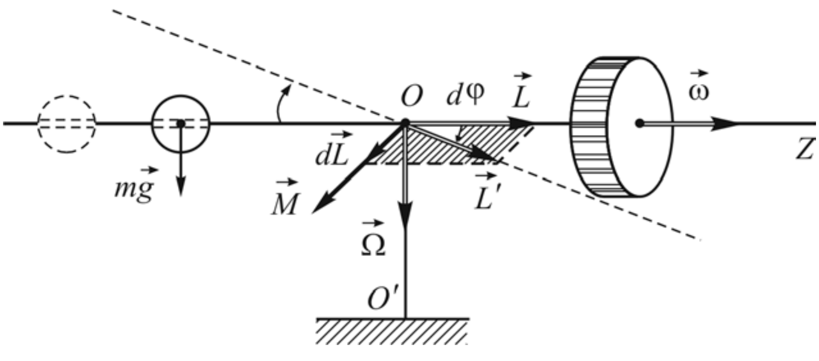

Рис. 12.4

Пусть гироскоп представляет собой насаженный на ось электромотора массивный диск, который вращается с большой угловой скоростью ω в указанном на рис. 12.4 направлении вокруг оси

OZ, расположенной горизонтально. Система может быть уравновешена с помощью подвижного груза массой m. Момент импульса диска направлен вдоль оси вправо, и если момент внешних сил равен нулю, то $\vec{L} = \text{const}$. Если переместить груз влево, то возникнет суммарный момент внешних сил $\vec{M}$ относительно центра вращения *O*, направленный перпендикулярно плоскости чертежа к наблюдателю. Казалось бы, момент $\vec{M}$ стремится повернуть ось гироскопа в плоскости чертежа против часовой стрелки (это и случилось бы с невращающимся гироскопом). Ось же вращающегося гироскопа повернется в горизонтальной плоскости к направлению момента силы $\vec{M}$ (правый конец оси гироскопа повернется вперед к наблюдателю), поскольку в соответствии с законом динамики вращательного движения импульс гироскопа $\vec{L}$ получит приращение $d\vec{L} = \vec{M}dt$, которое имеет такое же направление, как и $\vec{M}$. Через время dt момент импульса гироскопа станет равным сумме $\vec{L}' = \vec{L} + d\vec{L}$ и по-прежнему будет находиться в горизонтальной плоскости. Направление $\vec{L}'$ совпадает с новым направлением оси гироскопа. Таким образом, ось симметрии гироскопа повернется в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси на некоторый угол $d\varphi$. Но и при новом положении оси вектор $\vec{M}$ снова перпендикулярен ей, поэтому ось все время будет вращаться в горизонтальной плоскости с угловой скоростью

$$\Omega = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Вращение гироскопа под действием момента сил называется *прецессией*.

Другой часто встречающийся вид гироскопа – так называемый *волчок* (рис. 12.5). Опыт показывает, что если ось вращающегося волчка отклонена от верти-

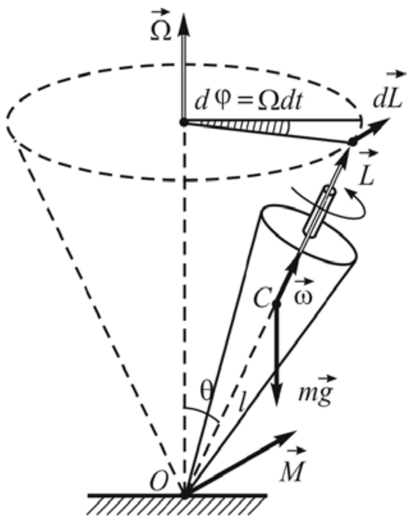

Рис. 12.5

кали, то волчок не падает, а совершает прецессионное движение: его ось описывает конус вокруг вертикали с некоторой угловой скоростью Ω. И чем больше угловая скорость ω вращения волчка вокруг своей оси, тем меньше угловая скорость прецессии Ω.

Согласно закону динамики вращательного движения момент импульса гироскопа $\vec{L}$ относительно точки *O* получает за время dt приращение $d\vec{L} = \vec{M}dt$, которое совпадает по направлению с вектором момента внешних сил $\vec{M}$ относительно точки *O*. В данном случае это момент силы тяжести $m\vec{g}$. Из рис. 12.5 видно, что $d\vec{L} \perp \vec{L}$. В результате вектор $\vec{L}$ (а значит, и ось волчка) будет поворачиваться вместе с вектором $\vec{M}$ вокруг вертикальной оси, описывая круговой конус.

Гироскопический эффект лежит в основе конструкций разных приборов: гирокомпаса, «искусственного горизонта» в самолетах, гироскопического успокоителя качки корабля, гироскопического стабилизатора положения ракеты и др. В ряде случаев при наличии в механизмах частей с быстрым вращением гироскопические силы могут оказывать вредное влияние. Например, при резком повороте корабля быстро вращающаяся ось турбины оказывает значительное дополнительное давление на подшипники, что может привести к их разрушению.

Тело будет оставаться в состоянии покоя до тех пор, пока нет причин, которые бы вызвали его поступательное движение или вращение. Для этого необходимо и достаточно выполнение двух условий:

а) сумма всех внешних сил, приложенных к телу, должна быть равна нулю:

$$\sum_i \vec{F}_i = 0;$$

б) суммарный момент внешних сил относительно любой оси (точки) должен быть равен нулю:

$$\sum_i \vec{M}_i = 0.$$

Для того чтобы тело не перемещалось вдоль некоторой оси или не вращалось вокруг нее, необходимо, чтобы сумма соответствующих проекций на эту ось была равна нулю.

Если тело в данный момент находится в равновесии, то это не значит, что оно будет оставаться в таком положении долгое время. Рассмотрим, как меняется результирующая действующих на тело сил при малом отклонении его от состояния равновесия.

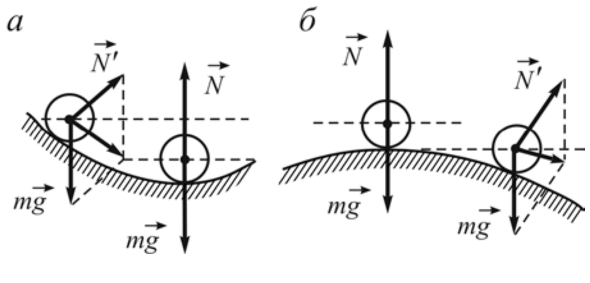

Рис. 12.6

Пусть тело, например шар, находится в состоянии покоя в нижней точке гладкой сферы. На него действуют равные и противоположно направленные силы $m\vec{g}$ и $\vec{N}$, сумма которых равна нулю (рис. 12.6, *а*). При отклонении шара от этого положения результирующая сил будет направлена к положению равновесия, куда и вернется шар, как только перестанет действовать отклоняющий фактор. Если при малом отклонении тела от положения равновесия результирующая внешних сил стремится вернуть его в прежнее положение, то говорят, что тело находится в *устойчивом равновесии*. При этом оно обладает минимумом потенциальной энергии в поле силы тяжести и его центр масс занимает самое низкое положение.

Если при отклонении тела от положения равновесия результирующая внешних сил увеличивает начальное отклонение, то равновесие называется *неустойчивым*. Так, при малейшем отклонении от положения равновесия шара, который лежит на вершине гладкой сферы, возникает результирующая сил, еще больше отдаляющая его от этого положения (рис. 12.6, *б*). Если при смещении тела из положения равновесия результирующая внешних сил остается равной нулю, то равновесие называется безразличным. В таком равновесии находится, например, шар на горизонтальной плоскости.