Лекция №16 Силы упругости. Упругие свойства твердых тел. Закон Гука для разных деформаций. Модули упругости, коэффициент Пуассона. Диаграмма напряжений. Упругий гистерезис. Потенциальная энергия упругой деформации.

Л-1: 7.8-7.10; Л-2: с.67-81; Л-3: §§ 73-80

Любое изменение формы и размеров тела под действием приложенных внешних сил называется *деформацией.*

Деформации делятся на упругие и неупругие, или пластические. Деформация называется *упругой*, если после прекращения действия внешней силы тело полностью восстанавливает первоначальные размеры и форму. Деформация называется *неупругой* (пластической), если после прекращения действия внешней силы тело не восстанавливает первоначальную форму и размеры. В природе нет абсолютно упругих или абсолютно неупругих тел. При сравнительно небольших деформациях многие твердые тела (прежде всего металлические) ведут себя, как тела упругие. При больших внешних воздействиях в телах возникают заметные пластические деформации.

При деформации изменяются расстояния между частицами деформированного тела. В результате этого изменяются электромагнитные (в основном кулоновские) силы взаимодействия между заряженными частицами, входящими в состав атомов. Макроскопически это проявляется в том, что при деформации тела в нем возникают силы, противодействующие внешним силам, которые вызвали деформацию. В механике эти силы, возникающие в упругих телах при небольших деформациях, называют *упругими*. Если деформированное тело находится в состоянии равновесия, то упругие силы компенсируют внешние силы, под действием которых произошла деформация. В случае упругой деформации внутренние силы определяются величиной и видом деформации. Для неупругих деформаций внутренние силы определяются также скоростью изменения деформации. Все разнообразие видов деформаций может быть сведено к двум основным: *растяжение (или сжатие)* и *сдвиг*.

Введем физические величины для количественной характеристики деформированного тела. Возьмем тонкий однородный стержень длиной l, один конец которого жестко закрепим, а на другой воздействуем силой $\vec{F}$, равномерно распределенной по сечению и направленой перпендикулярно ему (рис. 16.1). Под действием силы $\vec{F}$ стержень удлиняется на величину Δl, которая называется *абсолютной деформацией*. Для описания деформации более значимой характеристикой является не абсолютное значение удлинения стержня Δl, а его относительное удлинение. Это следует из того, что не одинаково просто растянуть, например, на 5 мм два стержня из одинакового материала и одинакового поперечного сечения, но разной длины, например, 10 см и 10 м. В то же время, как показывает опыт, одной и той же силой оба эти тела могут быть растянуты на одну и ту же долю их первоначальной длины. *Относительная деформация* показывает, какую часть от первоначальной длины тела составляет его деформация растяжения

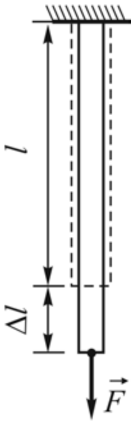

Рис. 16.1

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}.$$

Относительная деформация стержня прямо пропорциональна приложенной силе $\vec{F}$ и обратно пропорциональна его поперечному сечению S

$$\varepsilon = \alpha \frac{F}{S},$$

где α – коэффициент упругости, который зависит от материала, из которого сделан стержень. Для характеристики упругих свойств материала вводят также модуль упругости, который для деформации растяжения называют *модулем Юнга*

$$E = \frac{1}{\alpha}.$$

Подставляя вместо α модуль Юнга, получим

$$\varepsilon = \frac{F}{ES}.$$

В теории упругости внешнюю силу, которая действует на единицу площади поверхности тела, называют *усилием*. Если внешняя сила направлена перпендикулярно площади сечения, усилие называется *нормальным* и обозначается p_n

$$p_n = \frac{F}{S}.$$

С учетом введенного понятия получим:

$$\varepsilon = \frac{p_n}{E} \text{ или } \varepsilon E = p_n.$$

Механическое состояние упруго деформированного тела характеризуется напряжением. *Напряжением* называют внутреннюю упругую силу, действующую на единицу площади сечения, проведенного внутри тела. Если внутренняя сила направлена перпендикулярно площади сечения, напряжение называется нормальным и обозначается σ_n. Для деформации, которая установилась в однородном и изотропном теле, напряжение численно равно усилию

$$\sigma = p.$$

Английский физик Роберт Гук (1635–1703) в 1675 г. на основе экспериментальных данных установил, что для малых деформаций напряжение, которое возникает в деформированном теле, прямо пропорционально относительной деформации

$$\sigma = k\varepsilon,$$

где k – модуль упругости, который зависит от рода материала и типа деформации.

Для деформации растяжения закон Гука запишется:

$$\sigma = E\varepsilon.$$

Из последней формулы следует, что модуль Юнга E численно равен напряжению, которое возникает в теле при его относительном удлинении, равном единице. Таким образом, модуль Юнга E численно равен напряжению, при котором длина стержня увеличивается вдвое. Такие деформации выдерживают лишь некоторые материалы (например, каучук), обычно раньше наступает разрушение тела. В случае продольных деформаций тело изменяет не только свои линейные размеры, но и поперечные. Для характеристики изменений поперечных размеров тела вводится понятие *относительной поперечной деформации*

$$\varepsilon_d = \frac{\Delta d}{d},$$

где d – первоначальный поперечный размер тела, Δd – абсолютное изменение его поперечного размера.

Отношение абсолютного значения относительного поперечного сжатия к относительной продольной деформации называется *коэффициентом Пуассона*

$$\mu = \frac{|\varepsilon_d|}{\varepsilon}.$$

Коэффициент Пуассона μ зависит от свойств материала и не превышает 0,5. Модуль Юнга и коэффициент Пуассона являются главными характеристиками упругих свойств изотропного материала. Деформация кристалла зависит не только от направления действия на него внешних сил, но и от ориентации в нем кристаллографических осей, поэтому соотношения между ε и p_n или σ более сложные.

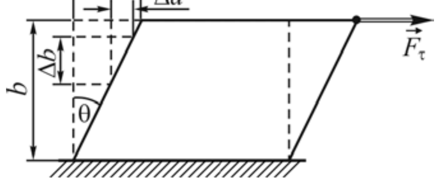

Рис. 16.2

Рассмотрим второй основной тип деформаций – сдвиг. Представим твердое тело в форме прямоугольного параллелепипеда, нижняя грань которого закреплена неподвижно, а по касательной к верхней грани равномерно распределено действие сил, равнодействующая которых $\vec{F}_\tau$ (рис. 16.2). Под действием этой силы слои тела сдвигаются друг относительно друга. Из рисунка видно, что абсолютный сдвиг слоев разный и зависит он от их расположения. Для характеристики упругих свойств тела при деформации сдвига вводится понятие *относительного сдвига*

$$\gamma = \frac{a}{b} = \frac{\Delta a}{\Delta b} = tg\theta \cdot$$

Относительный сдвиг γ одинаков для всех слоев тела. Угол θ называют *углом сдвига*. Для малых углов сдвига, что обычно наблюдается в реальных условиях, $tg\theta \approx \theta$ и $\gamma \approx \theta$. Таким образом, угол сдвига θ характеризует относительный сдвиг γ. Введем понятие *касательного (тангенциального) напряжения*, которое определим как упругую силу, действующую на единицу площади сечения внутри тела и направленную по касательной к площади этого сечения

$$\sigma_\tau = \frac{F}{S} \cdot$$

Опытным путем установлено, что для малых деформаций упругое касательное напряжение прямо пропорционально углу сдвига:

$$\sigma_\tau = G\gamma = G\theta .$$

Коэффициент пропорциональности G зависит только от свойств материала и называется модулем сдвига. Если $\gamma = tg\theta = 1$, то $G = \sigma_\tau$.

Таким образом, *модуль сдвига* G численно равен такому тангенциальному напряжению, при котором угол сдвига оказался бы равным 45°. В реальных случаях раньше наступает разрушение тела.

Модуль Юнга E, модуль сдвига G и коэффициент Пуассона μ связаны между собой следующим соотношением:

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \cdot$$

Деформация *кручения* по своей природе является деформацией неоднородного сдвига. Под действием вращающего момента $\vec{M}$, созданного парой сил $\vec{F}$, цилиндр длиной l и радиусом r (рис. 16.3), нижнее основание которого закреплено, будет испытывать деформацию кручения. Как видно, деформация кручения представляет собой деформацию сдвига. Но величина сдвига будет не одинакова по всему радиусу цилиндра.

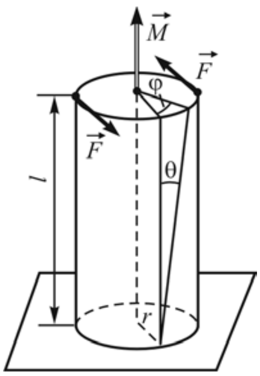

Рис. 16.3

При деформации кручения внутри цилиндра возникают упругие силы, создающие упругий момент $M_{упр}$, который уравновешивает крутящий момент внешних сил M. Экспериментально установлено, что момент внешних сил M прямо пропорционален углу закручивания

$$M = D\varphi.$$

Величину D называют *коэффициентом упругости при деформации кручения* (можно в литературе встретить название *постоянная кручения*). Это выражение представляет собой аналитический вид закона Гука для деформации кручения.

Коэффициент упругости при деформации кручения цилиндра и модуль сдвига связаны между собой следующим соотношением

$$D = \frac{\pi G r^4}{2l}.$$

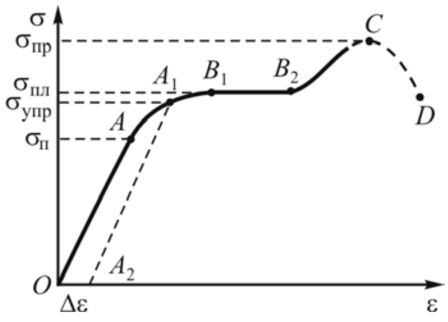

Рис. 16.4

Связь между деформацией тела и возникающим в нем напряжением графически изображается в виде *диаграммы растяжения*. Рассмотрим диаграмму растяжения на примере деформации продольного растяжения. Возьмем тонкий стержень и будем постепенно увеличивать внешнюю силу, измеряя для каждой силы соответствующую относительную деформацию (рис. 16.4). Отметим, что в условиях статического равновесия, как отмечалось ранее, напряжение равно внешнему усилию. Для небольших внешних сил напряжение σ, возникающее в стержне, прямо пропорционально относительной деформации ε. Максимальное напряжение, при котором еще выполняется прямо пропорциональная зависимость между σ и ε, называется *пределом пропорциональности* $\sigma_{\text{п}}$. Участок *ОА* на диаграмме получил название *участка пропорциональности*. На этом участке деформация является упругой и описывается законом Гука. Выше точки *А* относительная деформация увеличивается быстрее, чем напряжение, в результате исчезает линейная зависимость между σ и ε. Напряжение $\sigma_{\text{упр}}$, соответствующее предельному значению, при котором деформации еще остаются упругими, называется *пределом упругости*. Участок кривой AA_1 очень мал. Обычно в практических расчетах пределы пропорциональности и упругости совпадают. При напряжениях, более высоких, чем $\sigma_{\text{упр}}$, в стержне после прекращения действия внешней силы возникают остаточные или пластические деформации. В этом случае тело возвращается к ненапряженному состоянию по линии A_1A_2, а не по *АО*. Напряжение, при котором появляется заметная остаточная деформация (порядка 0,2 %), называется *пределом пластичности* $\sigma_{\text{пл}}$. Участок B_1B_2 получил название *участка текучести материала* или *участка пластических деформаций*. На участке B_1B_2 относительная деформация для некоторых материалов возрастает без увеличения нагрузки. Пластические деформации используются в специальных методах обработки металлов: при прокате, волочении, ковке, штамповке. Материалы, для которых участок текучести значительный, называют *вязкими* или *пластичными* (влажная глина, вар, каучук и др.). Материалы, у которых участок текучести практически отсутствует, называют *хрупкими* (стекло, кирпич, бетон и др.). Заметим, что механические свойства тел зависят от внешних факторов. Так, свинец при комнатной температуре пластичен, при низких же температурах становится хрупким.

После прохождения площадки текучести материал вновь оказывает сопротивление деформации и для его удлинения необходимо увеличить нагрузку – кривая поднимается. Максимальное напряжение $\sigma_{\text{пр}}$, возникающее в стержне до разрушения (точка *C*), называется *пределом прочности*. При напряжении, близком к пределу прочности материала, внешние силы не полностью уравновешиваются силами упругости. При этом в одном из сечений тела образуется сужение, называемое шейкой, и напряжение здесь возрастает в сравнении с другими местами тела, поскольку площадь сечения шейки меньше, что и приводит к разрушению тела. Соответствующий участок на графике обозначен пунктиром.

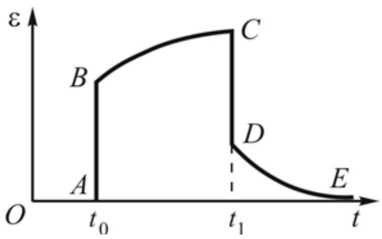

Рис. 16.5

Для всех твердых тел характерна довольно сложная зависимость деформации от времени (рис. 16.5).

Внешние силы при деформации упругого тела совершают работу. При этом происходит увеличение потенциальной энергии тела. Если потенциальную энергию недеформированного тела принять равной нулю, то в этом случае вся потенциальная энергия, которой обладает деформированное упругое тело, будет равна работе, затраченной на деформацию тела. В качестве примера рассмотрим растянутый (или сжатый) стержень.

В соответствии с законом Гука, для того, чтобы изменить длину стержня на величину x, необходимо приложить к нему силу

$$F = \frac{ES}{l}x,$$

где E – модуль Юнга, I – длина недеформированного стержня. Элементарная работа этой силы на участке dx равна Fdx, а полная работа, которую нужно затратить для изменения длины стержня на величину Δl, равна

$$A = \int_0^{\Delta l} Fdx = \frac{ES}{l}\int_0^{\Delta l} xdx = \frac{ES}{l}\frac{(\Delta l)^2}{2}.$$

Умножив и разделив последнее равенство на I, имеем:

$$A=\frac{EV}{2}\left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2=\frac{EV}{2}\varepsilon^2,$$

где $\varepsilon=\Delta l/l$ – относительная деформация $V=Sl$ – объем стержня.

Выразив ε из закона Гука для деформации растяжения ($\sigma=E\varepsilon$), и подставив в предыдущую формулу, получим

$$E_n=A=\frac{\sigma^2 V}{2E}\cdot$$

Найдем потенциальную энергию единицы объема

$$w_n=\frac{\sigma^2}{2E}\cdot$$

Аналогично при сдвиге

$$w_n=\frac{\sigma_\tau^2}{2G},$$

где σ_τ – касательное напряжение, G – модуль сдвига.

Полученные формулы позволяют вычислить потенциальную энергию упруго деформированного тела как эквивалент той работы, которая затрачена извне на деформацию. Это выполняется в том случае, если при деформации не достигнут предел упругости. При наличии остаточных деформаций работа упругих сил меньше работы внешних сил. Часть работы внешних сил при этом идет на изменение внутренней энергии тела (на его нагревание). Следовательно, энергия, затраченная на остаточную деформацию, переходит в другие ее формы. Эта часть энергии не может быть использована для совершения работы, она рассеивается.

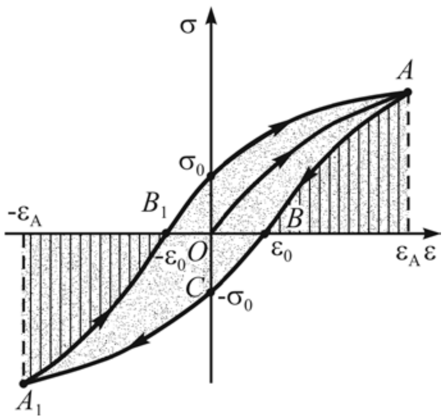

Рис. 16.6

Рассмотрим случай, когда в результате деформации растяжения однородный стержень получил относительное удлинение ε_A, причем изменение напряжения с изменением величины относительной деформации происходило по кривой *OA* (рис. 16.6). Отметим, что напряжение в точке *A* больше напряжения, которое соответствует пределу упругости материала $\sigma_{упр}$. После того как действие внешней силы прекратится, график зависимости σ от ε будет изображаться кривой *AB*. В точке *B* деформация в стержне полностью не исчезнет, в нем сохранится некоторая остаточная деформация ε_0, определяемая отрезком *OB*. Чтобы ликвидировать эту деформацию, необходимо стержень подвергнуть деформации противоположного знака (сжатию). В результате в точке *C* относительная деформация станет равной нулю, но в стержне возникнет отрицательное по отношению к первоначальному напряжение $-\sigma_0$, которое определяется отрезком *OC*. Продолжая дальше сжимать стержень, достигнем значений напряжения и относительной деформации, соответствующих точке A_1. Уменьшая внешнюю нагрузку до нуля, переведем стержень в состояние B_1. В этом состоянии стержень имеет остаточную деформацию $-\varepsilon_0$. Подвергая снова стержень деформации растяжения, переведем его в исходное положение *A*.

Явление упругого гистерезиса заключается в отставании деформации упругого тела от напряжения, обусловленного упругими силами. При деформации тела в пределах от точки B_1 до точки *A* внешние силы выполняют работу, пропорциональную площади, заключенной между кривой B_1A, ординатой точки *A* и осью абсцисс. На участке *AB* работа выполняется внутренними упругими силами. Она пропорциональна площади фигуры, заключенной между кривой *AB*, ординатой точки *A* и осью абсцисс. Площадь верхней части петли упругого гистерезиса равна разности этих площадей и пропорциональна разности работ внешних и внутренних сил. Аналогично нижняя часть петли гистерезиса дает разность работ внешних и внутренних сил. Таким образом, площадь петли упругого гистерезиса пропорциональна энергии, которая переходит во внутреннюю энергию (идет на нагревание тела) при каждом цикле деформации. Чем больше площадь гистерезиса, тем быстрее и сильнее нагревается тело.