

Лекция №20 Стационарное движение жидкости. Уравнение неразрывности струи. Уравнение Бернулли для идеальной жидкости и его применение. Формула Торричелли. Реакция вытекающей струи.

Л-1: 8.3-8.4; Л-2: с. 269-297

При рассмотрении движения жидкости в большинстве случаев с достаточной степенью точности можно считать ее идеальной жидкостью.

Идеальная жидкость – воображаемая несжимаемая жидкость, лишенная *вязкости* и *теплопроводности*. В идеальной жидкости отсутствует внутреннее трение, т.е. нет касательных напряжений между двумя соседними слоями, она непрерывна и не имеет структуры.

Движение слоев жидкости или газа относительно друг друга или всей жидкости или газа относительно твердых тел называют *течением*. Совокупность частиц движущейся жидкости называется *поток*ом.

Движение жидкости будет известно, если в каждой точке области пространства, где течет жидкость, будет известен вектор скорости \vec{v} проходящих через нее частиц жидкости как функция времени. Совокупность векторов скоростей, заданных для всех точек пространства, образует *поле вектора скорости*.

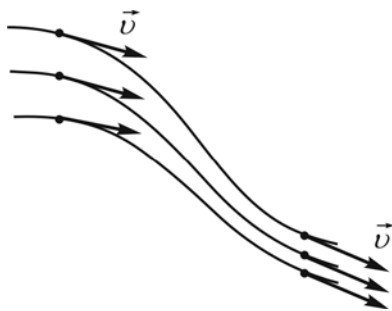


Рис. 20.1

Если в движущейся жидкости провести линии таким образом, чтобы касательная к ним в каждой точке совпадала по направлению с вектором \vec{v} , то такие линии называются *линиями тока* (рис. 20.1). Условились проводить линии тока так, чтобы их густота была больше там, где больше скорость течения жидкости и меньше там, где жидкость течет медленнее.

В результате по картине линий тока можно судить не только о направлении, но и о величине вектора \vec{v} в разных точках пространства.

Величина и направление скорости в рассматриваемых точках пространства в общем случае могут меняться со временем. Если ни в одной из точек потока вектор скорости \vec{v} с течением времени не изменяется, то течение жидкости называется *установившимся* или *стационарным*. Но в разных точках стационарного потока скорости могут быть различными. Это означает, что линии тока при установившемся течении жидкости совпадают с траекториями частиц.

Часть потока, ограниченная боковой поверхностью, образованной линиями тока, называется *трубкой тока*. Любая трубка тока в стационарном потоке жидкости не изменяется с течением времени. Поэтому очевидно, что если поток стационарен, то внутри данной трубки тока движутся все время одни и те же частицы жидкости. Следовательно, количество жидкости, проходящей через какое-то сечение трубки тока, сохраняется неизменным на всем протяжении трубки (поскольку жидкость считаем несжимаемой).

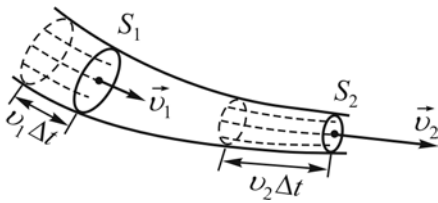


Рис. 20.2

Рассмотрим течение жидкости по трубке тока, изображенной на рис. 20.2. Выделим в стационарном потоке идеальной жидкости участок достаточно узкой трубки тока, ограниченной поперечными сечениями S_1 и S_2 . Эти сечения должны

быть настолько малыми, чтобы скорости частиц жидкости, проходящих через любую точку каждого сечения, можно было бы считать одинаковыми по величине и перпендикулярными к сечению. Найдем объем жидкости, протекающей за интервал времени Δt через каждое из сечений S_1 и S_2 . Через сечение S_1 пройдут все частицы жидкости, расстояние которых до этого сечения в начальный момент не превышало $v_1\Delta t$. Откуда объем жидкости, которая протекает через сечение S_1 за время Δt , равен $S_1v_1\Delta t$. Аналогично за то же время через сечение S_2 протечет объем жидкости, равный $S_2v_2\Delta t$. Учи-

ывая, что жидкость несжимаемая и поток стационарный, приходим к выводу, что найденные объемы должны быть одинаковы, т.е.

$$S_1 v_1 = S_2 v_2.$$

Полученное соотношение называется *уравнением неразрывности струи*.

Поскольку сечения S_1 и S_2 могут находиться в любом месте трубки тока, то уравнение неразрывности в общем виде можно записать

$$Sv = \text{const}.$$

Установим связь между давлением и скоростью жидкости в разных сечениях трубки. Поскольку мы рассматриваем идеальную жидкость (не учитываем вязкость и сжимаемость жидкости), то в этом случае работа внутренних сил в жидкости будет равна нулю. Будем также считать, что трение между жидкостью и стенкой сосуда отсутствует.

Рассмотрим стационарное течение жидкости. При перемещении некоторой массы жидкости Δm из одного сечения трубы во второе ее скорость, а значит, и кинетическая энергия изменяются. Внешними силами, которые действуют на эту массу жидкости, являются ее сила тяжести Δmg и силы давления со стороны жидкости, которая находится позади этой массы, $F_1 = p_1 S_1$ и со стороны жидкости, находящейся перед ней, $F_2 = p_2 S_2$. Если рассматривать эту массу в качестве физической системы, которая находится в инерциальной системе отсчета, связанной с поверхностью Земли, то изменение кинетической энергии рассматриваемой массы жидкости согласно теореме об изменении кинетической энергии равно сумме работ силы тяжести и сил давления, т.е.

$$\frac{\Delta m v_2^2}{2} - \frac{\Delta m v_1^2}{2} = \Delta mg (h_1 - h_2) + (p_1 - p_2) \Delta V,$$

где ΔV – объем жидкости, переместившейся за некоторый интервал времени с участка трубы сечением S_1 и давлением p_1 на другой участок трубы сечением S_2 и давлением p_2 ; v_1 и v_2 – скорости течения жидкости в рассмат-

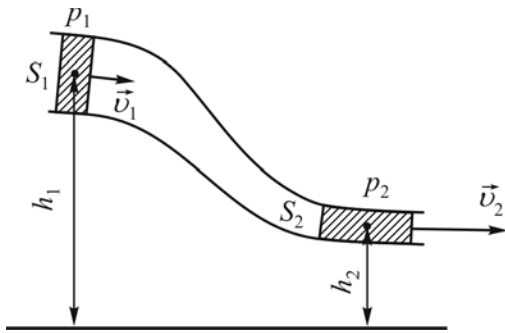


Рис. 20.3

риваемых сечениях; h_1 и h_2 – высоты центра тяжести выделенной массы жидкости относительно некоторого нулевого горизонтального уровня (рис. 20.3). После деления левой и правой частей полученного равенства на объем ΔV получим

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2.$$

Так как сечения S_1 и S_2 взяты произвольно, то для любого сечения трубки тока

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + p = \text{const}.$$

Полученное соотношение называют *уравнением Бернулли*, согласно которому при стационарном течении идеальной жидкости сумма ее статического $p + \rho g h$ и динамического $\rho v^2/2$ давлений постоянна в любом сечении трубы.

Анализируя уравнение Бернулли, можно также прийти к выводу, что оно выражает закон сохранения энергии для единицы объема жидкости: $\rho v^2/2$ – кинетическая энергия единицы объема жидкости, $\rho g h$ – его потенциальная энергия в поле силы тяжести, p – работа силы давления при подъеме единицы объема на единичную высоту.

Из уравнения Бернулли следует, что при увеличении скорости течения (уменьшении сечения трубы) динамическое давление жидкости возрастает, а ее статическое давление уменьшается.

Уравнение Бернулли является основным законом механики движения идеальной жидкости, при помощи которого можно описать различные частные случаи движения этой жидкости.

Следует отметить, что это уравнение, полученное для идеальной жидкости, применимо также и к газам в тех случаях, когда сжимаемостью и внутренним трением газа можно пренебречь. Как показывают расчеты и подтверждено экспериментально, приведенные выше ограничения выполняются при небольших скоростях газа. Так, при небольших скоростях в газовом потоке не возникают большие градиенты скорости, а следовательно силы внутреннего трения невелики. Это же относится и к сжимаемости газов, которой можно пренебречь при движении газов со скоростями, меньшими скорости распространения звука в них. Так, скорость звука в воздухе при температуре $T = 273 \text{ К}$ равна $331 \text{ м/с} \approx 1200 \text{ км/ч}$. Поэтому если воздух движется со скоростью, не превышающей этот предел, его можно считать идеальной несжимаемой жидкостью и применять к нему уравнение Бернулли.

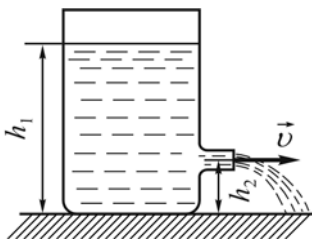


Рис. 20.4

Пользуясь уравнением Бернулли, найдем скорость вытекания жидкости из отверстия в стенке или в дне сосуда. Пусть уровень свободной поверхности жидкости по отношению ко дну сосуда находится на высоте h_1 , а на высоте h_2 над дном сосуда (рис. 20.4) имеется отверстие.

Причем площадь отверстия чрезвычайно мала по сравнению с площадью поперечного сечения сосуда. Выделим в сосуде трубку тока, одно из сечений которой совпадает с отверстием, а второе находится на свободной поверхности жидкости. При этом выбор второго сечения совершенно произволен, поскольку скорости частиц жидкости в каждой точке ее свободной поверхности одинаковы. Применяя к данной трубке тока уравнение Бернулли, получим:

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2,$$

где p_1 и p_2 – давления на свободной поверхности жидкости и в точках отверстия соответственно. Давление на свободной поверхности жидкости p_1 равно атмосферному p_0 , давление p_2 будет больше атмосферного на ве-

личину $\Delta p = \rho_g g (h_1 - h_2)$, где ρ_g – плотность воздуха, $h_1 - h_2$ – высота столба воздуха. Поскольку плотность воздуха весьма мала по сравнению с плотностью жидкости, то изменением атмосферного давления можно пренебречь и считать, что у отверстия давление также равно атмосферному. С учетом того, что площадь свободной поверхности $S_1 \gg S_2$, на основании уравнения неразрывности струи получим: $v_2 \gg v_1$. Таким образом, можем считать, что $v_1 = 0$, и уравнение Бернулли принимает вид

$$\rho g h_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2.$$

Откуда

$$v_2 = \sqrt{2g(h_1 - h_2)}.$$

Как видно, скорость истечения жидкости из отверстия равна скорости свободного падения тела с той же высоты. Полученную формулу называют *формулой Торричелли*. Если отверстие в дне сосуда, то $h_2 = 0$. Тогда

$$v = \sqrt{2gh}.$$

Рассмотрим трубку тока, расположенную горизонтально ($h_1 = h_2$). Уравнение Бернулли для двух сечений горизонтальной трубки тока будет иметь вид:

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + p_2.$$

Из этого уравнения и уравнения неразрывности струи видно, что при течении жидкости по горизонтальной трубе, имеющей различные сечения, скорость жидкости больше в местах сужений, давление же больше в широких местах.

Таким образом, если в сечениях трубки тока $v_1 > v_2$, то $p_1 < p_2$. Поместим в поток движущейся жидкости манометрическую трубку, нижнее отверстие которой параллельно линиям тока жидкости (рис. 20.5). С помощью такой трубки по высоте столба жидкости в ней можно измерять статическое дав-

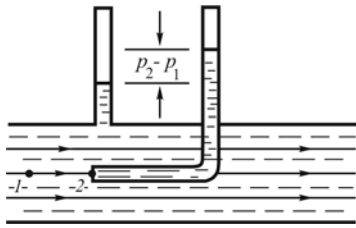


Рис. 20.5

ление в потоке жидкости. Введем также в этот поток изогнутую манометрическую трубку, входное отверстие которой направлено навстречу потоку жидкости. Такую трубку называют *трубкой Пито*. Выберем в потоке жидкости горизонтальную трубку тока и запишем уравнение Бернулли для сечений 1 и 2. Сечение 2 совпадает с сечением входного отверстия трубки Пито, а сечение 1 находится в невозмущенном потоке жидкости. В сечении 2 скорость частиц жидкости уменьшается до нуля, следовательно, давление, измеряемое трубкой Пито, в соответствии с уравнением Бернулли

$$p_2 = p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2}.$$

Манометрическая трубка с отверстием, обращенным навстречу потоку, измеряет сумму статического и динамического давлений. Как видно, комбинация двух этих трубок позволяет измерить динамическое давление в жидкости. Увеличение давления у отверстия изогнутой манометрической трубки можно объяснить сжатием жидкости, которая здесь затормаживается.

По принципу работы трубки Пито созданы приборы для измерения скорости потока жидкости или для измерения скорости движения тел в неподвижной жидкой или газовой среде, например, для определения скорости самолета в неподвижной воздушной среде. По показаниям рассмотренных выше манометрических трубок можно определить скорость течения и объем протекающей жидкости. По уровням жидкости в манометрических трубках, используемых для измерения статического давления в различных сечениях трубы (рис. 20.6) и величинам поперечных сечений в двух местах трубы, где

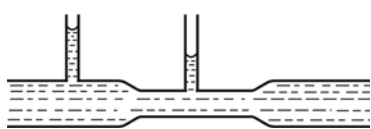


Рис. 20.6

стоят трубки, на водонасосных станциях определяют «расход» воды, т.е. количество воды, проходящей ежесекундно через трубку. На таких же принципах основаны различные приборы для измерения полной

массы протекающей жидкости за некоторый промежуток времени (водомеры и газомеры).

При больших скоростях течения жидкости в узких частях трубки давление p может оказаться сильно пониженным. Жидкость, протекающая по узким частям трубки, в этом случае будет находиться в состоянии всестороннего

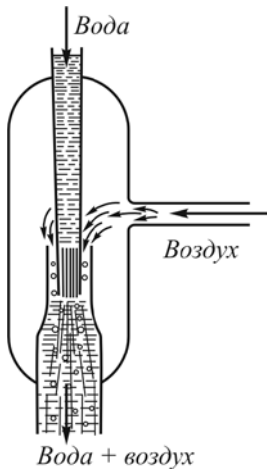


Рис. 20.7

растяжения и струя жидкости в результате будет при этом оказывать засасывающее действие. На понижении давления в узких местах трубок основаны многочисленные физические и технические приборы – водоструйные насосы, ртутные насосы, инжекторы, пульверизаторы, карбюраторы двигателей внутреннего сгорания и т.п. В водоструйном насосе вода из водопровода попадает в трубку, которая в конце сужена (рис. 20.7). В этом месте вода приобретает большую скорость, а давление сильно падает, сюда засасывается воздух (или другой газ) из трубки, соединенной с резервуаром, откуда производят откачивание. Вода, разбитая на капли, стекает вместе с воздухом. Водоструйные насосы, будучи простыми по устройству и эксплуатации, широко применяются в лабораториях и позволяют создавать разрежение до 90 Па. Пароструйные ртутные насосы позволяют создавать разрежение до 0,01 Па.

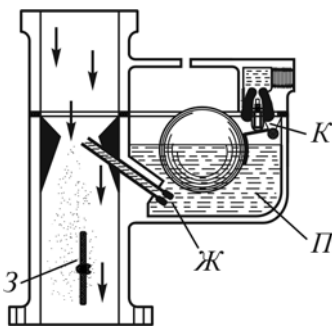


Рис. 20.8

В карбюраторе воздух, засасываемый в камеру сгорания двигателя, движется по каналу, сечение которого уменьшается при помощи заслонки $З$, вследствие чего его скорость возрастает, а давление понижается (рис. 20.8). В итоге струя воздуха засасывает жидкое топливо из поплавковой камеры Π через тон-

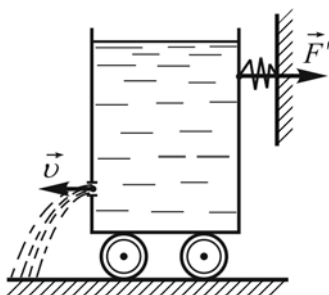


Рис. 20.9

ким отверстием.

кую трубку Ж, называемую жиклером, и, распыляя его, увлекает за собой в камеру сгорания. Постоянный уровень топлива в камере П поддерживается с помощью клапана К, через который камера сообщается с бензобаком.

Пусть в боковой стенке сосуда, содержащего жидкость, имеется закрывающееся отверстие площадью S , через которое жидкость может вытекать из сосуда (рис. 20.9). В соответствии с законом сохранения импульса механической системы сосуд–вытекающая жидкость изменение импульса данной системы при отсутствии внешних сил должно быть равно нулю. Применение этого закона дает возможность определить силу реакции струи текущей жидкости на стенки сосуда, в котором она движется.

Вытекающая жидкость за время dt уносит импульс $dm\vec{v}$, где $dm = \rho S v dt$ – масса вытекающей жидкости плотностью ρ за время dt , v – ее скорость, определяемая по формуле Торричелли. Следовательно, в итоге сосуд должен приобрести импульс, равный по величине импульсу вытекающей жидкости и противоположно ему направленный, т.е. должен начать двигаться в направлении, противоположном скорости вытекающей жидкости. Это означает, что со стороны вытекающей жидкости на сосуд будет действовать сила, называемая *силой реакции*, которая и сообщает сосуду ускорение. Определим эту силу.

Импульс, приобретаемый жидкостью за время dt , будет

$$dmv = \rho S v^2 dt.$$

Согласно второму закону Ньютона

$$\rho S v^2 dt = F dt.$$

Откуда модуль силы \vec{F} , действующей на вытекающую жидкость, будет равен

$$F = \rho S v^2.$$

В соответствии с третьим законом Ньютона равная по модулю, но противоположная по направлению сила \vec{F}' должна действовать со стороны вытекающей жидкости на сосуд

$$F' = \rho S v^2.$$

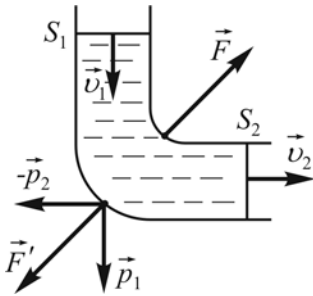


Рис. 20.10

Сила реакции возникает и в том случае, когда скорость течения постоянна по модулю, но изменяется по направлению. Рассмотрим случай, когда жидкость течет по трубе постоянного сечения, плавно изогнутой под углом 90° (рис. 20.10). Если движение стационарное, то скорости во всех сечениях трубы по модулю одинаковы.

Через сечение S_1 , расположенное до поворота трубы, жидкость за время dt переносит импульс $\vec{p}_1 = (\rho S_1 v_1) \vec{v}_1$, через сечение S_2 – импульс $\vec{p}_2 = (\rho S_2 v_2) \vec{v}_2$.

Поскольку $S_1 = S_2 = S$ и $v_1 = v_2 = v$, то

$$d\vec{p} = \rho S v (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) dt,$$

а

$$\vec{F} = \rho S v (\vec{v}_2 - \vec{v}_1).$$

Модуль силы реакции в этом случае, как видно из рисунка, будет

$$F' = \sqrt{2} \rho S v^2.$$

На существовании силы реакции такого типа основано действие водяных или паровых турбин. Струя жидкости или пара, протекая по искривленным каналам колеса турбины, создает силы реакции, момент которых и вызывает вращение колеса турбины.